

Modellierung von Schwingungsphänomenen in Papierkalandern

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur
Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

D i s s e r t a t i o n

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Steffen Wiendl

aus Frankfurt am Main

Berichterstatter:	Prof. Dr. Peter Hagedorn
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Samuel Schabel
Tag der Einreichung:	18.08.2011
Tag der mündlichen Prüfung:	16.11.2011

Darmstadt 2011

D17

Kurzfassung

In einem der letzten Schritte der Papierherstellung werden in Papierkalandern die für den späteren Verwendungszweck benötigten Oberflächeneigenschaften erzeugt. Hierbei wird das Papier durch einen oder mehrere Walzenspalte geführt und so geglättet. Im Zusammenhang mit der Kalandrierung kann es zu Schwingungsphänomenen kommen, die einen wirtschaftlichen Betrieb der Papiermaschine beeinträchtigen. Eines der Schwingungsphänomene wird in der Praxis als plötzliche Instabilität bezeichnet und ist dadurch charakterisiert, dass es bei hohen Betriebsgeschwindigkeiten unvermittelt zu Schwingungen der Walzen kommt. Hierbei entstehen in sehr kurzer Zeit große Schwingungsamplituden und die sich verändernden Kontaktkräfte führen zu einer verminderten Oberflächenqualität des Papiers. Ein weiteres Schwingungsphänomen ist unter der Bezeichnung „Barring“ bekannt. Charakteristisch hierbei ist, dass sich in einem Zeitraum von mehreren Tagen bis Wochen, parallel zu langsam aufklingenden Walzenschwingungen, irreversible Wellenmuster auf den kunststoffbezogenen Walzen ausbilden. Zusätzlich zu einer verminderten Oberflächenqualität des Papiers hat das Barring zur Folge, dass die geschädigten Walzen in regelmäßigen Abständen ausgetauscht und geschliffen werden müssen. Weder das Auftreten von plötzlichen Instabilitäten noch die langsame Bildung von Verschleißmustern auf den Walzen sind aus mechanischer Sicht zufriedenstellend erklärt. Ein mangelndes Verständnis der ursächlichen Vorgänge verhindert derzeit effiziente Gegenmaßnahmen. Mathematisch-mechanische Modelle von Papierkalandern helfen, die ursächlichen maschinendynamischen Prozesse zu verstehen. Gegenstand dieser Arbeit ist es, solche Modelle zu entwickeln und zu analysieren. Ferner werden Stellschrauben für die Entwicklung von Gegenmaßnahmen aufgezeigt und bewertet.

Abstract

Calendering is one of the last steps in the manufacturing process of paper. Concerning appearance and printability of the paper, here, the needed surface properties are achieved. The operation is performed by passing the paper web through a nip formed by two rotating cylinders pressed against each other. There are different types of calendering units varying in the number of nips. The efficiency of the whole manufacturing process is strongly influenced by two vibrational phenomena, which sometimes occur during the calendering operation. One phenomenon is characterized by an instability of the whole calendering unit. Consequently, large vibrational amplitudes arise in very short time, resulting in varying contact forces and thus in a poor surface quality of the paper. Another phenomenon is called barring. Here, within days and concurrent with slowly growing vibrational amplitudes, grooves occur on the cylinders, leading to short operating times. From a mechanical point of view, the origin of the described phenomena are not understood, which up to now, prevents the design of efficient countermeasures. Mathematical-mechanical models of paper calenders can provide a basis for understanding the underlying effects. The aim of this thesis is to develop and analyze such models. Furthermore parameters for the development of countermeasures are identified and evaluated.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Fachgebiet Dynamik und Schwingungen, später angesiedelt als Arbeitsgruppe Dynamik und Schwingungen im Fachgebiet Systemzuverlässigkeit und Maschinenakustik, des Fachbereichs Maschinenbau der Technischen Universität Darmstadt.

Ich möchte mich an dieser Stelle herzlich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Dies gilt insbesondere für den Leiter der Arbeitsgruppe Herrn Prof. Dr. Peter Hagedorn. Von seiner wissenschaftlichen Betreuung, Förderung sowie der unter seiner Leitung in der Arbeitsgruppe gegebenen Arbeitsweise habe ich stets profitiert. Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Samuel Schabel bedanke ich mich für die Übernahme des Koreferates.

Der Firma VOITH Paper gebührt besonderer Dank für die Finanzierung des Forschungsprojektes. Seitens VOITH Paper sind aufgrund der vielen fachlichen Diskussionen und Anregungen besonders die Herren Dr.-Ing. Rolf van Haag, Dr.-Ing. Jochen Niemann und Dr.-Ing. Lothar Zimmermann hervorzuheben.

Meinen beiden Kollegen, Dr.-Ing. Gottfried Spelsberg-Korspeter und Dr.-Ing. Daniel Hochlenert, möchte ich besonders für Ihren Einsatz danken, der dieses Forschungsprojekt überhaupt ermöglicht hat. Auch waren beide mir stets sehr wertvolle Gesprächspartner und ich verdanke ihnen viele Anregungen.

Für das angenehme Arbeitsklima und die Unterstützung danke ich weiterhin meinen ehemaligen und derzeitigen Kollegen der Arbeitsgruppe Dynamik und Schwingungen Dr.-Ing. Florian Fischer, Dr.-Ing. Martin Schönecker, Dr.-Ing. Alexander Lünenschloß, Dr.-Ing. Ana Costa-Conrado, Dipl.-Ing. Eduard Heffel, Dipl.-Ing. Andreas Wagner, Andres Arrieta-Diaz Ph.D. und vor allem auch Renate Schreiber und Maria Rauck.

Bei meinen Freunden, hier vor allem bei meinem guten Freund Dr.-Ing. Benjamin Lambie, möchte ich mich für die schöne Zeit in Darmstadt bedanken.

Meinen Eltern bin ich zu tiefem Dank verpflichtet, da sie mir diesen Bildungsweg ermöglicht haben.

Zuletzt möchte ich noch Dominika für ihr Verständnis und die Unterstützung während der Anfertigung dieser Arbeit danken.

Darmstadt, Dezember 2011

Steffen Wiendl

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Stand der Forschung	5
1.3	Gegenstand der Arbeit	8
2	Modellierung kopplungsbedingter Schwingungsphänomene	11
2.1	Modellierung des stationären Zustandes	11
2.1.1	Kontaktkinematik	13
2.1.2	Modell der Stoffbahn ohne Dämpfung	15
2.1.3	Modell der Stoffbahn mit Dämpfung	19
2.2	Schwingungen um den stationären Zustand	21
2.2.1	Bewegungsgleichungen und Linearisierung	22
2.2.2	Schwingungsverhalten bei ungedämpftem Modell der Stoffbahn	30
2.2.3	Schwingungsverhalten bei gedämpftem Modell der Stoffbahn	39
2.3	Diskussion der Ergebnisse	39
3	Modellierung verschleißbedingter Schwingungsphänomene	43
3.1	Fest gelagerte Walze mit Oberflächenverschleiß	43
3.1.1	Konstitutive und Systemgleichungen	44
3.1.2	Lösung des Differentialgleichungssystems	47
3.2	Elastisch gelagerte Walze mit Oberflächenverschleiß	53
3.2.1	Konstitutive und Systemgleichungen	54
3.2.2	Analyse der homogenen Lösung	57
3.2.3	Einfluss einzelner Dämpfungsterme	63

3.3	System mit zwei dynamischen Freiheitsgraden und Oberflächenverschleiß	65
3.3.1	Konstitutive und Systemgleichungen	66
3.3.2	Analyse der homogenen Lösung	68
3.3.3	Einfluss einzelner Dämpfungsterme	72
3.4	Diskussion der Ergebnisse	75
4	Zusammenhänge zwischen kopplungs- und verschleißbedingten Phänomenen	79
4.1	Modell einer Walze mit Oberflächenverschleiß im Kontakt mit der Stoffbahn	79
4.1.1	Systemgleichungen und Linearisierung	81
4.1.2	Analyse des Eigenverhaltens	88
4.2	Diskussion der Ergebnisse	92
5	Zusammenfassung	93
6	Anhang	97
	Literaturverzeichnis	99

1 Einleitung

1.1 Motivation

In der modernen Papierfabrikation produzieren Papiermaschinen, bei einer Produktionsbreite von teilweise über zehn Metern und einer Produktionsgeschwindigkeit von bis zu 3000 m/min, bis zu 100 Tonnen Papier pro Tag. Nach Bos [2] gehören Papiermaschinen „zu den teuersten selbstständigen Werkzeugen die gebaut werden“. Papier wird nach [9] als „flächiger, im Wesentlichen aus Fasern meist pflanzlicher Herkunft bestehender Werkstoff“ definiert. Während des Produktionsprozesses wird im Stoffauflauf der Papiermaschine aus einer Suspension, bestehend aus Wasser, Zellstofffasern und diversen Füll- und Hilfsstoffen, zunächst ein Blatt bzw. die Papier- oder Stoffbahn gebildet. Die nasse Papierbahn wird dann in der Pressenpartie der Papiermaschine entwässert und verdichtet. Nach dem Pressen erfolgt eine weitere Reduktion des Wassergehaltes der Stoffbahn. Dies wird durch die Zufuhr von Wärmeenergie über den Kontakt mit Trockenzyclindern oder aufgewärmter Luft in der Trockenpartie der Maschine erreicht. Nach der Trocknung der Stoffbahn folgt, je nach späterem Verwendungszweck, eine Oberflächenveredelung. In einem der letzten Prozessschritte der Papierherstellung müssen bei etlichen Papiersorten Dickenschwankungen ausgeglichen, sowie primär Glätte und Glanz an der Oberfläche erzeugt und verbessert werden. Die zum Ausgleich der Dickenschwankungen eingesetzten Aggregate bezeichnet man als Glättwerke. Glätte und Glanz werden mit Aggregaten erzeugt, die als Kalanders bezeichnet werden. Der Prozess ist in beiden Fällen dadurch gekennzeichnet, dass die Papierbahn durch einen oder mehrere Walzenspalte, geformt aus zwei gegeneinander gepressten, rotierenden Walzen geführt und so

komprimiert und geglättet wird. Die Kontaktzone zwischen den Walzen wird als Nip bezeichnet. In Glättwerken besteht die Walzenpaarung zumeist aus Stahlwalzen, während in Kalandern Stahlwalzen und Walzen mit elastischem Überzug kombiniert werden. Eine weitere Unterteilung der Maschinen zur Glätteherzeugung kann nach der Anzahl der Nips erfolgen. Neben den einfachen, oft paarweise verwendeten Zweiwalzenmaschinen, sind für eine Mehrnipausführung vor allem die Kalandere nach Janus-Bauweise und Superkalandere zu erwähnen. In Bild 1.1 wird exemplarisch für eine paarweise verwendete Zweiwalzenmaschine die Prinzipskizze eines EcoSoft™ Modular-Kalanders der Firma VOITH Paper gezeigt. In Bild 1.2 findet sich die Prinzipskizze eines Janus™ MK2 Mehrnipkalanders der Firma VOITH Paper. Aufgrund der Notwendigkeit, über die gesamte Arbeitsbreite Papier mit konstanter Dicke zu erzeugen, sind die Walzen in Kalandern oder Glättwerken üblicherweise mit Systemen zur Kompensation der Durchbiegung ausgestattet. Hierbei rotiert der Walzenmantel um eine feststehende Achse und wird von innen gestützt. Um die für die Stützwirkung notwendigen Kräfte von der Achse auf den Walzenmantel zu übertragen, gibt es im Wesentlichen zwei Konstruktionsprinzipien. Bei einer S-Walze wird der Freiraum zwischen Achse und Walze durch eine Dichtleiste in zwei Kammern unterteilt. In einer der beiden Kammern wird ein hoher Öldruck erzeugt und so eine Durchbiegung kompensiert. Bei dem zweiten Konstruktionsprinzip wird der Walzenmantel über

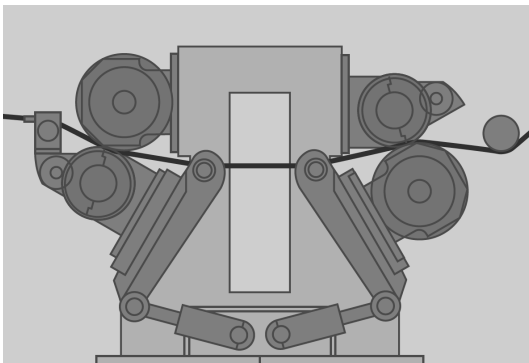


Bild 1.1:
Prinzipskizze eines
EcoSoft™
Modular-Kalanders der
Firma VOITH Paper
[39]

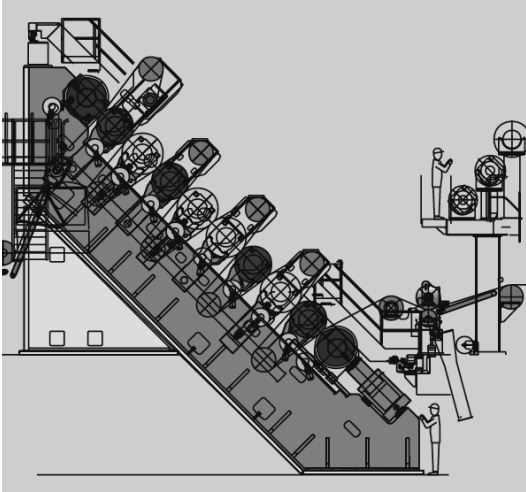
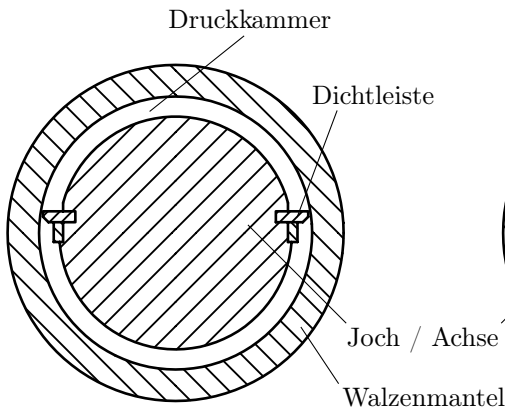


Bild 1.2:
Prinzipskizze eines
JanusTM MK2
Mehrnippkalanders
der Firma VOITH Paper
[40]

hydrostatische Elemente abgestützt, die über die gesamte Arbeitsbreite angeordnet sind und einzeln angesteuert werden können. Eine Skizze der Konstruktionsprinzipien zur Kompensation der Durchbiegung ist in Bild 1.3 gezeigt. Im Zusammenhang mit der Kalandrierung der Papierbahn kann es zu Schwingungsphänomenen kommen, die den Prozess gegebenenfalls maßgeblich beeinflussen. Eines der Schwingungsphänomene ist dadurch charakterisiert, dass es bei hohen Betriebsgeschwindigkeiten zu plötzlich auftretenden Schwingungen der Walzen kommt. Hierbei entstehen in sehr kurzer Zeit große Schwingungsamplituden. Neben einer starken Geräuschentwicklung entsteht auf der Papierbahn ein Streifenmuster, das durch die veränderlichen Kontaktkräfte hervorgerufen wird. Ein weiteres Schwingungsphänomen ist unter der Bezeichnung „Barring“ bekannt. Charakteristisch hierbei ist, dass sich in einem Zeitraum von mehreren Tagen bis Wochen irreversible Wellenmuster auf den kunststoffbezogenen Walzen bilden, die durch Verschleiß verursacht werden. Parallel zur Entwicklung der Wellenmuster klingen die Schwingungen der Walzen auf. Eine kurze Beschreibung des Phänomens findet sich z.B. in [32]. Zusätzlich zu einer verminderten Oberflächenqualität hat das Barring zur Folge, dass die geschädigten Walzen in regelmäßigen Abständen

ausgetauscht und überschliffen werden müssen. Da ein wirtschaftlicher Betrieb einer Papiermaschine nur bei hoher Produktqualität, niedrigen Betriebskosten und möglichst geringen Stillstandszeiten möglich ist, können die beschriebenen Schwingungsphänomene in der Praxis ernst zu nehmende Probleme darstellen. Durch die plötzlich auftretenden Schwingungen können die gewünschten Produktionsgeschwindigkeiten unter Umständen nicht erreicht werden. Im Fall von Barring entstehen neben ungewollten Produktionsausfällen zusätzliche Kosten, da die Standzeit der teuren Walzen erheblich verringert wird. Jahrelange Erfahrungen in der Industrie zeigen, wie schwer es fällt, im Bezug auf die beiden genannten Schwingungsphänomene geeignete Gegenmaßnahmen zu entwickeln. Daher ist es von großer Bedeutung, die ursächlichen maschinendynamischen Zusammenhänge zu verstehen. Dies ist in der Vergangenheit nur unzureichend geschehen. Eine mathematisch-mechanische Modellbildung kann zu einem besseren Verständnis der Schwingungsphänomene beitragen.

Prinzip 1: S-Walze



Prinzip 2: NIPCO-Walze

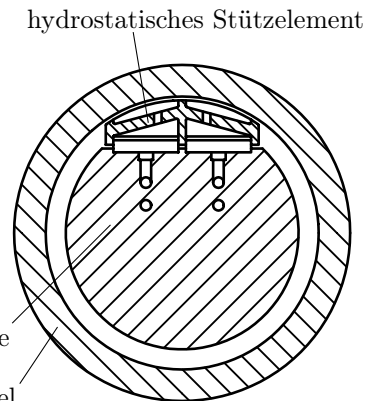


Bild 1.3: Konstruktionen zur Kompensation der Durchbiegung der Walze

1.2 Stand der Forschung

In der Vergangenheit wurden mathematisch-mechanische Modelle von Walzensystemen in Produktionsanlagen unter verschiedenen Aspekten entwickelt. Es existiert eine Reihe von Arbeiten, die das Schwingungsverhalten von Walzensystemen anhand ebener Modelle untersuchen, ohne dass die Entwicklung irreversibler Verschleißmuster bei der Modellierung berücksichtigt wird. WEYH [42] diskutiert das Modell einer Flachwalzanlage für Stahl, kommt abschließend jedoch nicht zu einem Ergebnis bezüglich dominierender Einflüsse bei den Wechselwirkungen zwischen Verarbeitungsprozess und Schwingungsverhalten. LABRENZ [24] und WEISS [41] untersuchen in ihren Arbeiten das Schwingungsverhalten gegeneinander gepresster Walzen, wobei einer der Wälzpartner mit einer Kunststoffschicht bezogen ist. Die Kunststoffschicht wird jeweils mit thermoviskoelastischen Eigenschaften modelliert. WEISS berechnet die Kontaktspannung auf Basis der HERTZschen Pressung und unterscheidet im Kontaktbereich zwischen totalem Haften oder totalem Gleiten unter Berücksichtigung COULOMBScher Reibung. LABRENZ stellt die geometrischen Bedingungen für den Kontakt der Wälzpartner auf und verwendet in der Kontaktzone ein regularisiertes Reibgesetz für die Modellierung. Zusammenfassend werden in beiden Arbeiten vier Mechanismen für selbsterregte Schwingungen genannt. Diese sind: Eine Selbsterregung aufgrund von Reibung im Kontakt, die Viskoelastizität mit einer langen Relaxationszeit, temperaturabhängige Eigenschaften des Materials und thermisch bedingte Ausdehnungen des Materials. Hierbei kommt es, sowohl bei der Viskoelastizität mit einer langen Relaxationszeit als auch bei den thermisch bedingten Phänomenen zu der Ausprägung von Wellenmustern, die allerdings reversibel sind. BROMMUNDT entwickelt in [4] ein Modell eines Papierkalenders, bei dem die Walzen als elastische Ringe modelliert werden und ferner eine linear elastische Papierbahn berücksichtigt wird. Im Kontaktbereich wird ein regularisiertes Reibgesetz verwendet. BROMMUNDT selbst erweitert seine Arbeit in [5] um ein viskoelastisch-plastisches Modell der Papierbahn. In beiden Arbeiten wird die Selbsterregung auf die

Reibung im Kontakt zurückgeführt. SPELSBERG-KORSPETER et al. [35] entwickeln in ihrer Arbeit ebenfalls ebene Modelle eines Papierkalanders. Die Walzen werden als starr angenommen und die linear elastische Stoffbahn an der engsten Stelle im Nip abgeschnitten, um so eine Plastifizierung zu berücksichtigen. Es wird im Kontakt der Walzen mit der Stoffbahn zwischen vollständigem Gleiten und vollständigem Haften unterschieden. Die erstellten Modelle sind einer systematischen Stabilitätsanalyse zugänglich. Ein Modell eines Mehrnipkalanders wird von MELNICK [29] vorgestellt. Hierbei liegt der Fokus darauf, zu ergründen, wie eine in einem der ersten Nips entstandene Fehlstelle die Walzen beim Durchlauf durch die folgenden Nips zu Schwingungen anregt. Es wird gezeigt, unter welchen Umständen es dadurch zu selbstverstärkenden Effekten kommen kann. Neben ebenen Modellen zur Untersuchung des Schwingungsverhaltens von Walzsystemen existieren Arbeiten, denen eine räumliche Modellierung zugrunde liegt. KESKINEN [23] modelliert in diesem Zusammenhang die Kalandervalzen als Starrkörper und verwendet ein verallgemeinertes Kontaktmodell. Analog zu MELNICK wird eine Selbsterregung aufgrund von Papierdickenschwankungen, die von Nip zu Nip laufen, identifiziert. In der Arbeit von JÄRVENPÄÄ et al. [22] werden die Kalandervalzen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente diskretisiert, über einen linear elastischen Linienkontakt gekoppelt, sowie das Eigenverhalten berechnet und diskutiert.

Abgesehen von den im ersten Absatz genannten Arbeiten existieren in der Literatur Modellierungsansätze, mit denen insbesondere die Wechselwirkungen zwischen Schwingungen von Walzensystemen und entstehenden Verschleißmustern untersucht werden. R. GRUNAU [12] und HADER [16] gehen in ihren Arbeiten anhand ebener Modelle, bei denen eine Bewegung starrer Walzen in vertikaler Richtung berücksichtigt wird, explizit auf die Entstehung von Verschleißmustern auf Walzenoberflächen bzw. Pressfilzen ein. In den Arbeiten wird der Kontaktbereich auf ein Feder-Dämpfer-Element reduziert. Es wird vorausgesetzt, dass sich die Oberflächen der Walzen proportional zur Kontaktkraft bleibend verformen. Grundlage der Modellierung ist es, die zeitlich schnellen, strukturdynamischen Vorgänge von den zeitlich langsamen

Verschleißprozessen zu entkoppeln und getrennt voneinander zu behandeln. Basierend auf dem beschriebenen Modellierungsansatz untersucht und bewertet E. GRUNAU [11] die Möglichkeiten zur positiven Beeinflussung der Wechselwirkungen durch dynamische Zusatzsysteme. BROMMUNDT [3] entwickelt auf Basis der Annahme, dass die schnellen maschinendynamischen Prozesse von dem langsamen Verschleiß getrennt behandelt werden können, ein Modell, das die Polygonalisation von Eisenbahnradern beschreibt. Eine weitere Herangehensweise, die Wechselwirkungen zwischen Verschleiß und Schwingungen der Walzen zu erfassen, besteht darin, zu berücksichtigen, dass ein sich einstellender Konturfehler nach einer Umdrehung der Walze wieder in den Kontaktbereich einläuft. Auf Basis dieser Herangehensweise modellieren SUEOKA et al. [38], MATSUZAKI et al. [27] sowie HERMANSKI [17] ein Zweiwalzensystem und gelangen zu einer Systembeschreibung durch ein Differentialgleichungssystem mit Totzeiten. Die Walzen sind hier ebenfalls als starr angenommen und es wird deren Bewegung in vertikaler Richtung berücksichtigt. Eine Erweiterung um eine totzeitbasierte Modellierung von Oberflächenverschleiß ihres Modells aus [22] stellen JÄRVENPÄÄ und YUAN in [21] vor und untersuchen hier anhand numerischer Zeitbereichsintegrationen aktive Elemente zur Schwingungsbeeinflussung.

Alle bislang vorgestellten Arbeiten haben das Schwingungsverhalten von Walzanlagen ohne die Berücksichtigung bzw. mit vereinfachten Verschleißgesetzen zum Thema. Modelle, welche das Schwingverhalten von Rotoren unter der Berücksichtigung von komplexeren Verschleißgesetzen abbilden, sind in der Vergangenheit vornehmlich im Bereich des Rad-Schiene-Kontakts entstanden. Eine Vielzahl der Beiträge zu dieser Thematik finden sich im DFG Sonderforschungsbereich “Hochfrequenter Rollkontakt der Fahrzeugräder“ [1]. Ebenfalls im Themenbereich des Rad-Schiene-Kontakts findet sich Grundlegendes zur Modellierung und numerischen Simulation abrasiv verschleißender dynamischer Systeme in der Arbeit von LANGEMANN [25]. MEINERS modelliert in [28] Eisenbahnradsätze mit Hilfe der FEM und berücksichtigt ebenfalls abrasiven Verschleiß. In beiden Arbeiten werden zur Lösung der konstitutiven Gleichungen numerische Integrationen durchgeführt.

Für die Modellierung des Kontaktbereiches in Papierkalandern sind die Werkstoffeigenschaften der Papierbahn von besonderer Bedeutung. MÄKELEÄ et al. entwickeln in [31] ein kontinuumsmechanisches, elasto-plastisches Materialmodell für Papier. STENBERG stellt in [36] ebenfalls ein elasto-plastisches Materialmodell für das mechanische Verhalten von Papier in Dickenrichtung vor. BROWNE et. al diskutieren in [8], [6] und [7] die Verwendung eines rheologischen Materialmodells für die Papiereigenschaften in Dickenrichtung, die Einflüsse der Papierstruktur auf die Spannungsverteilung im Pressnip eines Kalanders, sowie den experimentellen Nachweis bleibender Verformungen der Stoffbahn nach der Kalandrierung. VAN HAAG verwendet in [14] ebenfalls ein rheologisches Materialmodell und berechnet damit Spannungsverteilung und Kompressionsverhalten des Papiers bei Stempeldruckversuchen und beim Durchgang durch den Walzenspalt. LITVINOV und FARNOOD verwenden in [26] gleichermaßen rheologische Materialmodelle, erweitern die Modellierung allerdings um den Kunststoffbelag der Walze.

Diverse Arbeiten, die sich allgemein mit der Lösung des Kontaktproblems und der Berechnung stationärer Spannungsverteilungen zwischen kunststoffbezogenen Zylindern mit zu transportierendem Verarbeitungsgut im Kontaktbereich befassen, sind sowohl von HINGE und MANIATTY in [19] als auch von SOONG und LI in [34] und [33] verfasst. VAN HAAG löst in [13] das Kontaktproblem für den Walzenspalt eines Papierkalanders mit Hilfe der Finite-Element-Methode und berechnet stationäre Druckspannungsverteilungen.

1.3 Gegenstand der Arbeit

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist es, mathematisch-mechanische Modelle von Papierkalandern zu entwickeln und zu analysieren. Ferner sollen Stellschrauben für die Entwicklung von Gegenmaßnahmen bezüglich der auftretenden Schwingungsphänomene aufgezeigt und bewertet werden.

In Kapitel 2 wird ein ebenes Modell vorgestellt, das es ermöglicht, das Schwingungsverhalten der Kalandervalzen bei hohen

Produktionsgeschwindigkeiten zu untersuchen. Bei der Modellbildung liegt der Fokus auf der Modellierung der Gegebenheiten im Walzenspalt. Es wird der Frage nachgegangen, wie das Schwingungsverhalten eines Papierkalenders durch die Gegebenheiten im Nip beeinflusst wird.

In Kapitel 3 werden drei Modelle vorgestellt, die es ermöglichen, die ursächlichen Zusammenhänge bei der Entstehung von Verschleißmustern zu untersuchen. Es wird eine Modellierungsmethode vorgestellt, die auf eine geschlossene Systembeschreibung mit gewöhnlichen Differentialgleichungen führt.

In Kapitel 4 werden die Modellierungsansätze der ersten beiden Kapitel zusammengeführt. Es wird ein Modell vorgestellt, das es erlaubt, die maschinendynamischen Zusammenhänge bei der Entstehung von Verschleißmustern bei einer verfeinerten Modellierung des Kontaktbereiches zu untersuchen.

2 Modellierung

kopplungsbedingter

Schwingungsphänomene

Gegenstand dieses Kapitels ist, ein Modell zu entwickeln, das es ermöglicht, qualitativ das Schwingungsverhalten von Kalandervalzen bei hohen Produktionsgeschwindigkeiten zu untersuchen. Das Hauptaugenmerk liegt hierbei auf der Kopplung der Kalandervalzen über die sich im Kontaktbereich befindende Stoffbahn. Anhand des Modells wird analysiert, ob es aufgrund der mechanischen Gegebenheiten im Kontaktbereich zu einer Selbsterregung mit schnell anwachsenden Schwingungsamplituden kommen kann.

Das Vorgehen bei der Modellbildung besteht darin, zunächst ein Modell vorzustellen, mit dem die Gegebenheiten im Nip während des stationären Betriebes eines Papierkalanders nachgebildet werden können. Im zweiten Schritt wird das Modell auf den dynamischen Fall erweitert und das Schwingungsverhalten um die zuvor berechneten, stationären Zustände untersucht.

2.1 Modellierung des stationären Zustandes

Ein Modell, mit dem die Gegebenheiten im Walzenspalt während des stationären Betriebes nachgebildet werden können, ist in Bild 2.1 dargestellt. Das Modell besteht aus einer starren Walze mit dem Radius R_0 , die mit der konstanten Drehgeschwindigkeit Ω rotiert. Die Walze steht in Kontakt mit einem Modell der Stoffbahn und ist um ein festes q_0 in

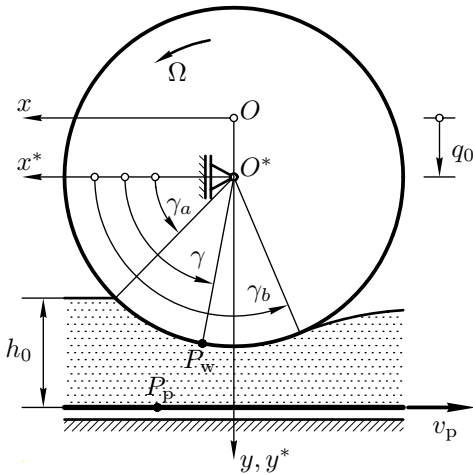


Bild 2.1:

Modell zur Berechnung der stationären Kräfteverhältnisse im Kontaktbereich

diese eingedrückt. Es wird Haften zwischen der Oberfläche der Stoffbahn und der Oberfläche der Walze angenommen. Im Koordinatensystem O^* , dessen Ursprung im Walzenmittelpunkt liegt, ist der Einlauf der Stoffbahn in den Kontaktbereich durch den Winkel γ_a und der Auslauf der Stoffbahn aus dem Kontaktgebiet durch den Winkel γ_b gegeben. Für den Einlauf der Stoffbahn wird angenommen, dass sie immer waagrecht und undeformiert in das Kontaktgebiet einläuft. Damit ist die Unterseite der Stoffbahn in dem Abstand $R_0 + h_0$ stets parallel zur x -Achse. Ferner wird angenommen, dass die Unterseite der Stoffbahn undeformierbar ist und sich mit der Geschwindigkeit v_p bewegt. Wie in Bild 2.2 dargestellt, wird das Verhalten der Stoffbahn vereinfacht durch ein Bürstenmodell mit punktuellen Eigenschaften abgebildet. Dabei wird die Unterseite der

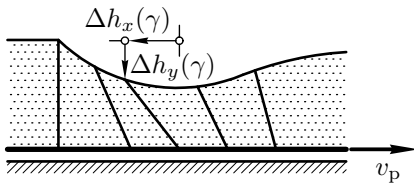


Bild 2.2:

Modellierung der Stoffbahn

Stoffbahn als undeformierbar angenommen. Jedem Punkt auf der Unterseite wird ein Stoffbahnelement zugeordnet. Diese Elemente können in x - und in y -Richtung deformiert werden. Die x -Richtung wird im Folgenden auch mit Bahnrichtung und die y -Richtung wird im Folgenden auch mit Dickenrichtung bezeichnet. Mit der Deformation in x -Richtung wird einer Scherverformung im Nip Rechnung getragen. Die einzelnen Elemente beeinflussen sich nicht gegenseitig. Diese Art der Modellierung der Stoffbahn ist motiviert durch die Veröffentlichungen von BROWN et al. [8], FEYGIN [10], VAN HAAG [14] und LITVINOV et al. [26].

Mit dem Modell aus Bild 2.1 können die verteilten Kräfte auf die Walzenoberfläche im stationären Betrieb berechnet werden. Es können Parameter gefunden werden, mit denen die verteilten Kräfte qualitativ den aus der Literatur bekannten verteilten Kräften im Walzenspalt entsprechen. Ferner kann ermittelt werden, unter welchen Bedingungen die Annahme von Haften zwischen der Oberfläche der Walze und der Oberfläche der Stoffbahn gilt. Im Folgenden wird zunächst die Kontaktkinematik hergeleitet und dann ein Stoffbahnmodell mit punktweise elastischen sowie ein Stoffbahnmodell mit punktweise viskoelastischen Eigenschaften eingeführt.

2.1.1 Kontaktkinematik

Zunächst wird die Kinematik im Kontaktbereich hergeleitet. Die Strecke von dem Mittelpunkt der Walze O^* zu einem beliebigen Punkt auf der Oberfläche der Walze P_w ist durch

$$\overrightarrow{O^*P_w} = R_0 \cos \gamma \vec{e}_{x^*} + R_0 \sin \gamma \vec{e}_{y^*} \quad (2.1)$$

gegeben. Der Verschiebungsvektor zwischen dem Ursprung des raumfesten Koordinatensystems O und einem Punkt auf der Walzenoberfläche ergibt sich damit zu

$$\overrightarrow{OP_w} = \overrightarrow{O^*P_w} + q_0 \vec{e}_y. \quad (2.2)$$

Ein beliebiger Punkt P_p auf der Mittelebene der Stoffbahn ist in raumfesten Koordinaten durch

$$\overrightarrow{OP_p} = (K - v_p \tau) \vec{e}_x + (R_0 + h_0) \vec{e}_y \quad (2.3)$$

beschrieben. Die Konstante K gewährleistet mit

$$K = R_0 \cos \gamma_a , \quad (2.4)$$

dass ein Element der Stoffbahn bei $\tau = 0$ undeformiert in den Kontaktbereich einläuft. Die Geschwindigkeiten von Punkten auf der Walzenoberfläche und der Unterseite der Stoffbahn im raumfesten Koordinatensystem sind

$$\vec{V}_{P_w} = \Omega \vec{e}_z \times \overrightarrow{O^*P_w} \quad (2.5)$$

sowie

$$\vec{V}_{P_p} = -v_p \vec{e}_x . \quad (2.6)$$

Die Zeit τ für den Durchlauf eines Elementes der Stoffbahn durch den Kontaktbereich kann mit

$$\tau = \int_{\gamma_a}^{\gamma} \frac{1}{\Omega} ds = \frac{\gamma - \gamma_a}{\Omega} \quad (2.7)$$

durch den Winkel γ parametrisiert werden. Geht man von Haften zwischen der Oberfläche der Papierbahn und der Oberflächen der Walze aus, folgt für die Deformation der Papierbahn im Kontaktbereich in Bahn- und Dickenrichtung

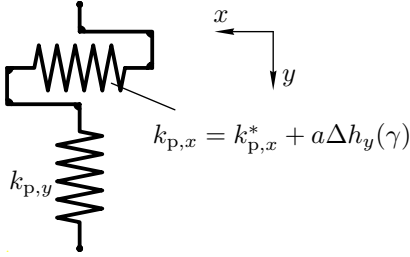
$$\Delta h_x(\gamma) = \left(\overrightarrow{OP_w} - \overrightarrow{OP_p} \right) \cdot \vec{e}_x = R_0 \cos \gamma - R_0 \cos \gamma_a + \frac{v_p(\gamma - \gamma_a)}{\Omega} \quad (2.8)$$

bzw.

$$\Delta h_y(\gamma) = \left(\overrightarrow{OP_w} - \overrightarrow{OP_p} \right) \cdot \vec{e}_y + h_0 = q_0 + R_0 \sin \gamma - R_0 . \quad (2.9)$$

Gleichfalls ergibt sich für die Relativgeschwindigkeiten zwischen den Punkten auf der Walzenoberfläche und den Punkten auf der Mittelebene der Stoffbahn im Kontaktbereich

$$\Delta v_x(\gamma) = \left(\vec{V}_{P_w} - \vec{V}_{P_p} \right) \cdot \vec{e}_x = v_p - R_0 \Omega \sin \gamma \quad (2.10)$$


Bild 2.3:

Punktweise Eigenschaften des ungedämpften Modells der Stoffbahn

und

$$\Delta v_y(\gamma) = \left(\vec{V}_{P_w} - \vec{V}_{P_p} \right) \cdot \vec{e}_y = R_0 \Omega \cos \gamma. \quad (2.11)$$

Mit der Annahme, dass die undeformierte Stoffbahn stets waagrecht in den Kontaktbereich einläuft, kann die vordere Kontaktbereichsgrenze γ_a aus der geometrischen Bedingung $\Delta h_y(\gamma_a) = 0$ bestimmt werden. Hieraus ergibt sich

$$\gamma_a = \arcsin \left(\frac{R_0 - q_0}{R_0} \right). \quad (2.12)$$

Die hintere Grenze des Kontaktbereiches γ_b folgt aus der Bedingung, dass die Normalkraft auf die Walzenoberfläche verschwinden muss.

2.1.2 Modell der Stoffbahn ohne Dämpfung

Nachdem die Kinematik im Kontaktbereich hergeleitet wurde, wird jetzt ein ungedämpftes Modell der Stoffbahn eingeführt. In Bild 2.3 sind die punktweisen Eigenschaften der Stoffbahn schematisch dargestellt. In Dickenrichtung werden linear elastische Eigenschaften angesetzt. Die Steifigkeit ist $k_{p,y}$. Die Steifigkeit in Bahnrichtung wird mit $k_{p,x}$ bezeichnet. STENBERG et al. [37] zeigen in ihrer Veröffentlichung, dass der Widerstand der Papierbahn gegen eine Scherdeformation mit der Kompression ansteigt. Diese Eigenschaft der Stoffbahn wird qualitativ mit

$$k_{p,x} = k_{p,x}^* + a \Delta h_y(\gamma) \quad (2.13)$$

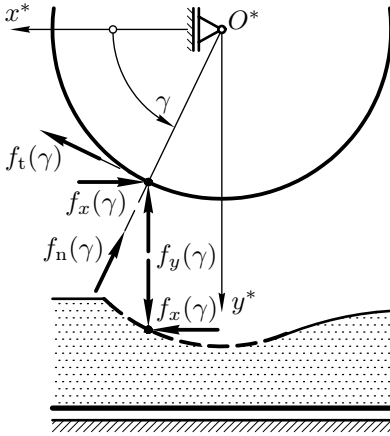


Bild 2.4:

Berechnung der verteilten Tangential- und Normalkräfte auf der Walzenoberfläche

abgebildet. Hierbei wird die punktweise Steifigkeit der Stoffbahn in Bahnrichtung durch a linear an die Deformation der Bahn in Dickenrichtung gekoppelt. Für die verteilten Kräfte auf die Walzenoberfläche in x - bzw. y -Richtung ergibt sich mit (2.8) und (2.9)

$$\begin{aligned} f_x(\gamma) &= (k_{p,x}^* + a \Delta h_y(\gamma)) \Delta h_x(\gamma), \\ f_y(\gamma) &= k_{p,y} \Delta h_y(\gamma). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die Kräfte aus (2.14) können entsprechend Bild 2.4 mit

$$\begin{aligned} f_t(\gamma) &= -f_x(\gamma) \sin \gamma + f_y(\gamma) \cos \gamma, \\ f_n(\gamma) &= f_x(\gamma) \cos \gamma + f_y(\gamma) \sin \gamma. \end{aligned} \quad (2.15)$$

in die verteilten Tangential- und Normalkräfte auf der Walzenoberfläche umgerechnet werden. Damit ist es möglich, die hintere Grenze des Kontaktbereiches bzw. den Auslauf der Stoffbahn aus

$$f_n(\gamma_b) = 0 \quad (2.16)$$

Parameter	Betrag	Einheit	Tabelle 2.1: Parameter für die Modellierung des Kontaktbereiches mit linear elastischer Stoffbahn
v_p	30	m/s	
$k_{p,x}^*$	2×10^{12}	N/m ²	
$k_{p,y}$	4×10^{12}	N/m ²	
R_0	0.35	m	
h_0	0.1×10^{-3}	m	
q_0	0.05×10^{-3}	m	

zu bestimmen. Gleichung (2.16) ist transzendent in γ_b und hängt bei gegebener Geschwindigkeit der Stoffbahn von der Drehgeschwindigkeit der Walze ab. Die Drehgeschwindigkeit der Walze wird hier mit Ω_0 so eingestellt, dass die resultierende Kraft im Kontaktbereich in Bahnrichtung verschwindet und von der Walze weder Leistung angenommen noch Leistung abgegeben wird. Die Geschwindigkeit Ω_0 kann damit aus der Gleichung

$$- \int_{\gamma_a}^{\gamma_b} \left(f_x(\gamma) \frac{d \overrightarrow{OP_w} \cdot \vec{e}_x}{d\gamma} \right) d\gamma = 0 \quad (2.17)$$

bestimmt werden. Im hier betrachteten Fall der ungedämpften Stoffbahn ergibt sich

$$\Omega_0 = \frac{2v_p((\gamma_a - \gamma_b) \cos \gamma_b - \sin \gamma_a + \sin \gamma_b)}{R_0(\cos \gamma_a - \cos \gamma_b)^2}. \quad (2.18)$$

Ist die Drehgeschwindigkeit der Walze Ω_0 , verschwinden die Normalkräfte auf die Walze bei

$$\gamma_b = \pi - \gamma_a. \quad (2.19)$$

Mit den in Tabelle 2.1 angegebenen Parametern können jetzt die verteilten Kräfte im Kontaktbereich angegeben werden. In Abbildung 2.5 sind diese für $a = 0$ mit

$$\gamma = \arccos \frac{x}{R_0} \quad (2.20)$$

als Funktion von x im Koordinatensystem O dargestellt. Aus Gründen der Anschauung ist die x -Achse in der Darstellung gespiegelt, d.h. wie in Bild 2.1 liegt der Einlauf der Stoffbahn in den Kontaktbereich rechts in der Graphik. Die Parameter für den Durchmesser der Walze R_0 , die Höhe der undeformierten Stoffbahn h_0 , die maximale Kompression der Stoffbahn q_0 orientieren sich an den von LITVINOV et al. in [26] angegebenen Werten. Die Steifigkeit $k_{p,y}$ ist so gewählt, dass sich aus den verteilten Kräften $f_y(x)$ bzw. $f_n(x)$, bezogen auf eine Arbeitsbreite eines Papierkalenders von 8 m, Druckspannungsverteilungen in der selben Größenordnung ergeben, wie man sie z.B. bei LITVINOV et al. in [26], bei HESTMO in [18] oder bei VAN HAAG in [13] bzw. in [14] findet.

Setzt man das COULOMBSche Reibgesetz voraus, erkennt man im Vergleich von $f_n(x)$ mit $f_t(x)$, dass für einen realistischen Reibbeiwert von $\mu = 0.3$ im

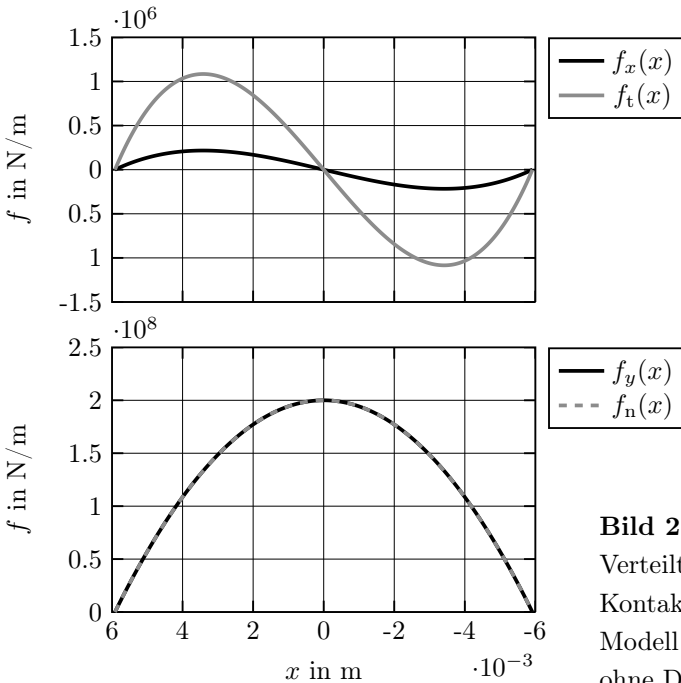


Bild 2.5:
Verteilte Kräfte im
Kontaktbereich bei
Modell der Stoffbahn
ohne Dämpfung

gesamten Kontaktbereich

$$|f_t(x)| < \mu f_n(x) \quad (2.21)$$

gilt und damit die Haftbedingung nicht verletzt wird. Es gilt jetzt, auch im Hinblick auf eine spätere dynamische Analyse, zu überprüfen, in welchem Maße der Parameter a aus Gleichung (2.13) erhöht werden kann, so dass die Bedingung des Haftens noch Gültigkeit hat. Die Ergebnisse einer entsprechenden numerischen Auswertung von (2.21) sind in Abbildung 2.6 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Haftbedingung im Kontaktgebiet bei der Drehgeschwindigkeit der Walze Ω_0 nach Gleichung (2.18) bis zu einem Kopplungsfaktor von ca. $a = 1.1 \times 10^{19} \text{N/m}^3$ nicht verletzt wird.

Es ist davon auszugehen, dass die Annahme des Haftens zwischen Stoffbahnoberfläche und Walzenoberfläche nur bei der Drehgeschwindigkeit Ω_0 der Walze haltbar ist. Wertet man (2.21) für $a = 0$ und

$$\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega \quad (2.22)$$

aus, kann dies bestätigt werden. Es ergeben sich die in Bild 2.7 dargestellten Haft- und Gleitzonen.

2.1.3 Modell der Stoffbahn mit Dämpfung

Zusätzlich zu den elastischen Eigenschaften wird es bei einer Umformung der Stoffbahn zu einer Energiedissipation kommen. Damit diese Einflüsse

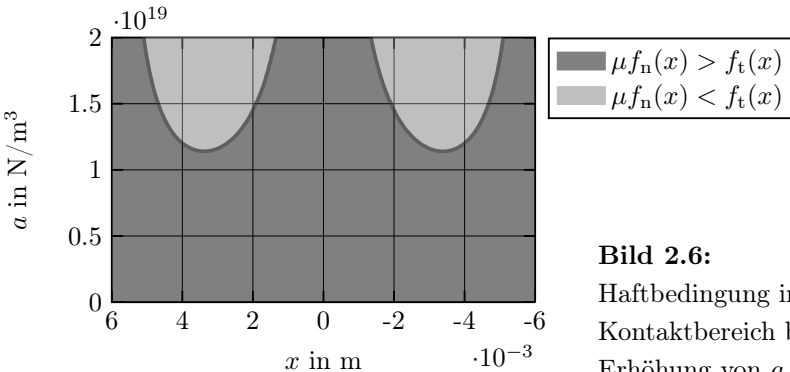
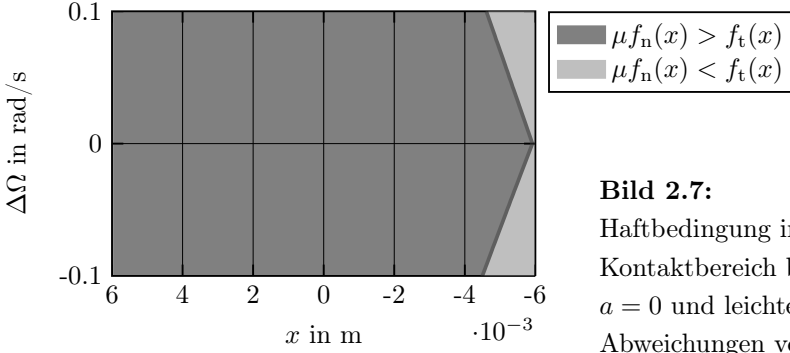


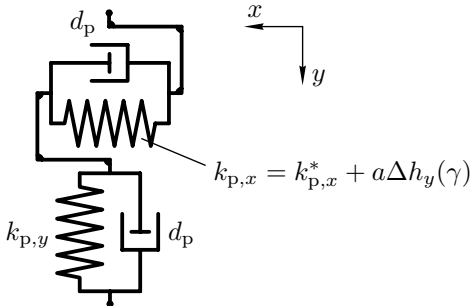
Bild 2.6:
Haftbedingung im
Kontaktbereich bei einer
Erhöhung von a



analysiert werden können, ist das Kraftgesetz (2.14) entsprechend zu erweitern. In Bild 2.8 sind die punktwisen Eigenschaften der Stoffbahn mit Dämpfung schematisch dargestellt. Es wird sowohl in Dicken- als auch in Bahnrichtung zusätzlich zu den elastischen Eigenschaften des Abschnittes 2.1.2 von punktwise viskosen Eigenschaften ausgegangen. Mit dem Dämpfungskoeffizienten d_p ergibt sich für die verteilten Kräfte

$$\begin{aligned} f_x(\gamma) &= (k_{p,x}^* + a \Delta h_y(\gamma)) \Delta h_x(\gamma) + d_p \Delta v_x(\gamma), \\ f_y(\gamma) &= k_{p,y} \Delta h_y(\gamma) + d_p \Delta v_y(\gamma). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Die verteilten Tangential- und Normalkräfte auf der Walzenoberfläche können wieder mit (2.15) berechnet werden.



Die Drehgeschwindigkeit der Walze wird mit Ω_0 wieder so gewählt, dass die resultierende Kraft in x -Richtung im Kontaktbereich verschwindet. Die Drehgeschwindigkeit bestimmt sich aus der Gleichung

$$-\int_{\gamma_a}^{\gamma_b} \left(f_x(\gamma) \frac{d\overrightarrow{OP_w} \cdot \vec{e}_x}{d\gamma} \right) d\gamma = 0. \quad (2.24)$$

Im Fall des Stoffbahnmodells mit Dämpfung ist mit dieser Drehgeschwindigkeit die Bedingung verschwindender Normalkräfte auf der Walzenoberfläche nicht mehr mit (2.19) erfüllt. Es wird deshalb der Auslauf der Stoffbahn γ_b durch numerisches Lösen von

$$f_n(\gamma_b) = 0 \quad (2.25)$$

ermittelt.

In Bild 2.9 sind die verteilten Kräfte im Kontaktbereich für die Parameter aus Tabelle 2.1, den Dämpfungskoeffizienten $d_p = 50 \times 10^6$ Ns/m und $a = 0.4 \times 10^{16}$ N/m² dargestellt. Der Dämpfungskoeffizient ist hierbei so gewählt, dass man Einflüsse der Dämpfung in der Stoffbahn erkennen kann, diese aber nicht maßgeblich für die Kräfteverteilung sind. Ein maßgeblicher Einfluss von geschwindigkeitsproportionalen Termen auf die stationären Kräfteverhältnisse im Nip ist aus der Literatur nicht bekannt. Der gewählte Wert von a ist ein Vorgriff auf die in Abschnitt 2.2 gezeigte Analyse des Schwingungsverhaltens um den stationären Zustand bei zunehmender Dämpfung in der Stoffbahn.

2.2 Schwingungen um den stationären Zustand

Nachdem in Abschnitt 2.1 der stationäre Zustand im Walzenspalt nachgebildet und analysiert wurde, unter welchen Bedingungen die Annahme von Haften Gültigkeit hat, wird die Modellierung jetzt auf den dynamischen Fall erweitert. Die hierfür notwendigen Ergänzungen sind in Bild 2.10 dargestellt. Die Walze der Masse m_w ist mit zwei

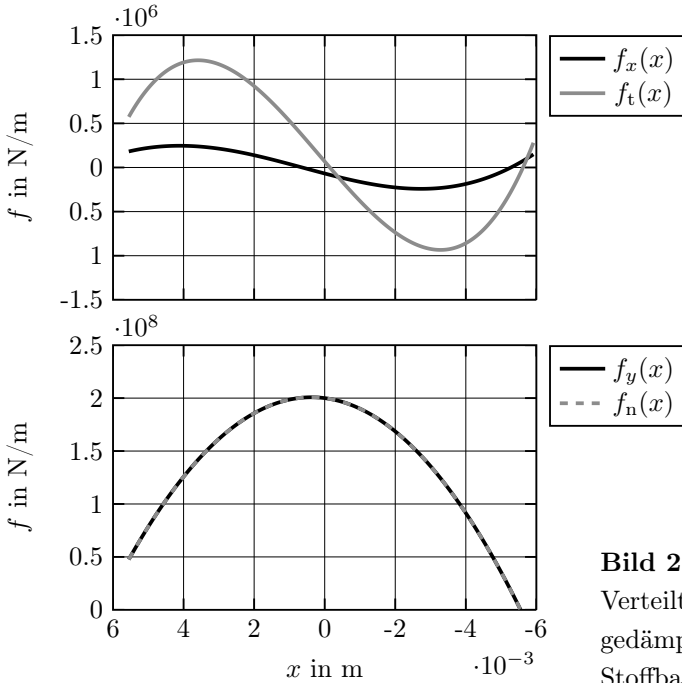


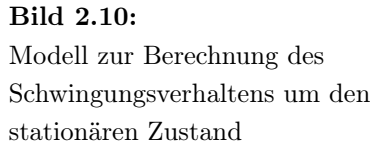
Bild 2.9:

Verteilte Kräfte bei gedämpftem Modell der Stoffbahn und $a = 0$

Federelementen der Steifigkeit k_w elastisch gelagert und die Verschiebungen des Walzenmittelpunktes sind in der x - und der y -Richtung durch $q_x(t)$ bzw. $q_y(t)$ gegeben. Neben den Federelementen wird durch zwei viskose Dämpferelemente, mit den Dämpfungskoeffizienten d_w , eine Energiedissipation in der Lagerung berücksichtigt. In Ruhe ist die Walze weiterhin um ein konstantes q_0 in die Stoffbahn eingedrückt. Die Lagerung der Walze wird so modelliert, dass in Abhängigkeit des Winkels α_1 die Federelemente und in Abhängigkeit des Winkels α_2 die Dämpferelemente nicht notwendigerweise senkrecht zueinander stehen.

2.2.1 Bewegungsgleichungen und Linearisierung

Für das Aufstellen der Bewegungsgleichungen des Systems, muss zunächst die Kinematik im Kontaktbereich für den dynamischen Fall erweitert werden.



$$\overrightarrow{OP_w} = \overrightarrow{O^*P_w} + q_x(t) \vec{e}_x + (q_0 + q_y(t)) \vec{e}_y. \quad (2.26)$$

$$K = R_0 \cos \gamma_a + q_x(t) . \quad (2.27)$$

$$\vec{V}_{P_w} = \Omega \vec{e}_z \times \overrightarrow{O^*P_w} + \dot{q}_x(t) \vec{e}_x + \dot{q}_y(t) \vec{e}_y. \quad (2.28)$$

Papierbahn für den Durchgang durch den Kontaktbereich benötigt, klein gegenüber der kleinsten Schwingungsperiode des Systems. Dahingehend wird angenommen, dass sich zu jedem Zeitpunkt t ein quasistationärer Zustand einstellt. Das bedeutet, dass für jede zeitliche Änderung von $q_x(t)$ und $q_y(t)$ entsprechend der Vorgehensweise aus Abschnitt 2.1.2 und Abschnitt 2.1.3 Kräfteverteilungen im Kontaktbereich angegeben werden können. Mit dieser Annahme kann τ wieder mit

$$\tau = \int_{\gamma_a}^{\gamma} \frac{1}{\Omega} ds = \frac{\gamma - \gamma_a}{\Omega} \quad (2.29)$$

durch den Winkel γ parametrisiert werden. Damit ergibt sich im dynamischen Fall für die Deformation der Stoffbahn

$$\Delta h_x(\gamma) = R_0 \cos \gamma - R_0 \cos \gamma_a + \frac{v_p(\gamma - \gamma_a)}{\Omega} \quad (2.30)$$

und

$$\Delta h_y(\gamma) = q_0 + q_y(t) + R_0 \sin \gamma - R_0. \quad (2.31)$$

Die Relativgeschwindigkeiten zwischen den Punkten auf der Walzenoberfläche und den Punkten auf der Unterseite der Stoffbahn im Kontaktgebiet ergeben sich zu

$$\Delta v_x(\gamma) = \dot{q}_x(t) + v_p - R_0 \Omega \sin \gamma \quad (2.32)$$

und

$$\Delta v_y(\gamma) = \dot{q}_y(t) + R_0 \Omega \cos \gamma. \quad (2.33)$$

Der Winkel γ_a , der den Einlauf des Kontaktgebietes beschreibt, folgt wieder aus der Bedingung $\Delta h(\gamma_a) = 0$. Im dynamischen Fall ergibt sich mit

$$\gamma_a = \gamma_a(q_y(t)) = \arcsin \left(\frac{R_0 - q_0 - q_y(t)}{R_0} \right) \quad (2.34)$$

eine Funktion der Walzenbewegung in y -Richtung. Der Winkel γ_b folgt aus $f_n(\gamma_b) = 0$. Aufgrund der Annahme der Quasistationarität ist der Winkel im Fall der Modellierung der Stoffbahn ohne Dämpfung mit

$$\gamma_b = \gamma_b(q_y(t)) \quad (2.35)$$

eine Funktion der Walzenbewegung in y -Richtung. Im Fall der Modellierung der Stoffbahn mit Dämpfung ist

$$\gamma_b = \gamma_b(q_y(t), \dot{q}_x(t), \dot{q}_y(t)) \quad (2.36)$$

eine Funktion der Walzenbewegung in y -Richtung sowie der Geschwindigkeiten der Walze in x - und y -Richtung.

Nachdem die Kontaktkinematik für den dynamischen Fall erweitert wurde, können jetzt die Bewegungsgleichungen der Walze aufgestellt werden. Hierzu werden im Folgenden die verteilten Kräfte im Kontaktbereich allgemein als Funktionen der Walzenbewegung bzw. der Walzengeschwindigkeiten angegeben. Unter Berücksichtigung des zweiten NEWTONschen Gesetzes ergibt sich mit

$$\hat{f}_x(\gamma, q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y) = f_x(\gamma, q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y) \frac{\partial \overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_x}{\partial \gamma} \quad (2.37)$$

für die Walzenbewegung in x -Richtung

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_x + k_w (q_x(\sin^2 \alpha_1 + 1) + (q_y + q_0) \sin \alpha_1 \cos \alpha_1) \\ + d_w (\dot{q}_x(\sin^2 \alpha_2 + 1) + \dot{q}_y \sin \alpha_2 \cos \alpha_2) \\ + \int_{\gamma_a(q_y)}^{\gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)} \hat{f}_x(\gamma, q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y) d\gamma = F_{x,0} . \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ferner gilt mit

$$\hat{f}_y(\gamma, q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y) = f_y(\gamma, q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y) \frac{\partial \vec{OP} \cdot \vec{e}_x}{\partial \gamma} \quad (2.39)$$

für die Bewegung der Walze in y -Richtung

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_y + k_w (q_x \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + (q_y + q_0) \cos^2 \alpha_1) \\ + d_w (\dot{q}_x \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \dot{q}_y \cos^2 \alpha_2) \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$+ \int_{\gamma_a(q_y)}^{\gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)} \hat{f}_y(\gamma, q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y) d\gamma = F_{y,0}.$$

Die beiden konstanten Kräfte $F_{x,0}$ und $F_{y,0}$ gewährleisten, dass das System sich im stationären Zustand, für den die Walze in Ruhe und um q_0 in die Stoffbahn eingedrückt ist, im Gleichgewicht befindet. Aufgrund von (2.34) und (2.36) werden die Integralterme in (2.38) und (2.40) in Abhängigkeit des Modells für die Stoffbahn in q_y , \dot{q}_x oder \dot{q}_y nichtlinear sein. Zur Untersuchung des Schwingungsverhaltens um den stationären Zustand können die Integralterme linearisiert werden. Hierzu ist es möglich, eine Entwicklung in eine TAYLORreihe um den Punkt $q_y = 0$, $\dot{q}_x = \dot{q}_y = 0$ durchzuführen und diese nach dem ersten Glied abzuberechnen. Mit den Integraltermen in (2.38) und (2.40) als allgemeine Funktion

$$\theta(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y) = \int_{\gamma_a(q_y)}^{\gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)} f(\gamma, q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y) d\gamma \quad (2.41)$$

gilt hierbei

$$\begin{aligned}
 \theta(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y) &= \theta(0, 0, 0) + q_y \frac{\partial \theta(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial q_y} \Big|_{q_y=0, \dot{q}_x=\dot{q}_y=0} \\
 &\quad + \dot{q}_x \frac{\partial \theta(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial \dot{q}_x} \Big|_{q_y=0, \dot{q}_x=\dot{q}_y=0} \\
 &\quad + \dot{q}_y \frac{\partial \theta(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial \dot{q}_y} \Big|_{q_y=0, \dot{q}_x=\dot{q}_y=0} \\
 &\quad + \mathcal{O}(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y) .
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Die partiellen Ableitungen können mit Hilfe der LEIBNIZ-Regel ermittelt werden. Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial \theta(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial q_y} \Big|_{q_y=0, \dot{q}_x=\dot{q}_y=0} = \\
 &\int_{\gamma_a(0)}^{\gamma_b(0,0,0)} \left[\frac{\partial f(\gamma, q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial q_y} \Big|_{q_y=\dot{q}_x=\dot{q}_y=0} \right] d\gamma \\
 &\quad + \frac{\partial \gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial q_y} \Big|_{q_y=0, \dot{q}_x=\dot{q}_y=0} f(\gamma_b(0,0,0), 0, 0) \\
 &\quad - \frac{\partial \gamma_a(q_y)}{\partial q_y} \Big|_{q_y=0} f(\gamma_a(0), 0, 0) ,
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{\partial \theta(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial \dot{q}_x} \right|_{q_y=0, \dot{q}_x=\dot{q}_y=0} = \\
 & \int_{\gamma_a(0)}^{\gamma_b(0,0,0)} \left[\left. \frac{\partial f(\gamma, q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial \dot{q}_x} \right|_{q_y=0, \dot{q}_x=\dot{q}_y=0} \right] d\gamma \\
 & + \left. \frac{\partial \gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial \dot{q}_x} \right|_{q_y=0, \dot{q}_x=\dot{q}_y=0} f(\gamma_b(0,0,0), 0, 0)
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{\partial \theta(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial \dot{q}_x} \right|_{q_y=0, \dot{q}_x=\dot{q}_y=0} = \\
 & \int_{\gamma_a(0)}^{\gamma_b(0,0,0)} \left[\left. \frac{\partial f(\gamma, q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial \dot{q}_y} \right|_{q_y=0, \dot{q}_x=\dot{q}_y=0} \right] d\gamma \\
 & + \left. \frac{\partial \gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial \dot{q}_y} \right|_{q_y=0, \dot{q}_x=\dot{q}_y=0} f(\gamma_b(0,0,0), 0, 0)
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

In (2.43) bis (2.45) sind alle Größen bekannt oder können ermittelt werden. Natürlich muss für den jeweilig zu untersuchenden Fall entweder $\hat{f}_x(\gamma, q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)$ oder $\hat{f}_y(\gamma, q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)$ eingesetzt werden. Die Winkel $\gamma_a(0)$ und $\gamma_b(0,0,0)$ sind aus den Berechnungen zum stationären Zustand aus den Abschnitten 2.1.2 und 2.1.3 zu übernehmen. Für die Ableitung von $\gamma_a(q_y)$ nach der Koordinate q_y an der Stelle $q_y = 0$ folgt aus Gleichung (2.34)

$$\left. \frac{\partial \gamma_a(q_y)}{\partial q_y} \right|_{q_y=0} = - \frac{1}{R_0 \sqrt{1 - \frac{(-q_0 + R_0)^2}{R_0^2}}} . \tag{2.46}$$

Die Gleichung

$$f_n(\gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y), q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y) = 0 \quad (2.47)$$

ist für kein Modell der Stoffbahn explizit nach dem Winkel $\gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)$ auflösbar. Daher folgt die partielle Ableitung von $\gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)$ nach q_y , \dot{q}_x bzw. \dot{q}_y an der Stelle $q_y = 0$, $\dot{q}_x = \dot{q}_y = 0$ aus dem Satz über implizite Funktionen zu

$$-\frac{\frac{\partial f_n(\gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y), q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial q_y}}{\frac{\partial f_n(\gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y), q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial \gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}} \bigg|_{q_y=0, \dot{q}_x=\dot{q}_y=0} = \frac{\partial \gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial q_y} \bigg|_{q_y=0, \dot{q}_x=\dot{q}_y=0}, \quad (2.48)$$

$$-\frac{\frac{\partial f_n(\gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y), q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial \dot{q}_x}}{\frac{\partial f_n(\gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y), q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial \gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}} \bigg|_{q_y=0, \dot{q}_x=\dot{q}_y=0} = \frac{\partial \gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial \dot{q}_x} \bigg|_{q_y=0, \dot{q}_x=\dot{q}_y=0} \quad (2.49)$$

und

$$-\frac{\frac{\partial f_n(\gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y), q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial \dot{q}_y}}{\frac{\partial f_n(\gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y), q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial \gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}} \bigg|_{q_y=0, \dot{q}_x=\dot{q}_y=0} = \frac{\partial \gamma_b(q_y, \dot{q}_x, \dot{q}_y)}{\partial \dot{q}_y} \bigg|_{q_y=0, \dot{q}_x=\dot{q}_y=0}. \quad (2.50)$$

Die beschriebenen Rechenschritte können für jede Modellierung der Stoffbahn zusammen mit den Bewegungsgleichungen (2.38) und (2.40) in einem Computeralgebrasystem ausgewertet werden. Berücksichtigt man noch, dass

$$q_0 \sin \alpha \cos \alpha + \int_{\gamma_a(0)}^{\gamma_b(0,0,0)} \hat{f}_x(\gamma, 0, 0, 0) d\gamma = F_{x,0} = 0 \quad (2.51)$$

und

$$q_0 \cos^2 \alpha + \int_{\gamma_a(0)}^{\gamma_b(0,0,0)} \hat{f}_y(\gamma, 0, 0, 0) d\gamma = F_{y,0} \quad (2.52)$$

ist, ergibt sich allgemein für das Schwingungsverhalten um den stationären Zustand das homogene, lineare Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D}_L + \mathbf{D}_P)\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_P)\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.53)$$

Der Vektor der verallgemeinerten Koordinaten ist $\mathbf{q} = [q_x, q_y]^\top$ und für die Massenmatrix sowie die Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix, die aus der Lagerung der Walze resultieren, gilt

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_w & 0 \\ 0 & m_w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_L = d_w \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha_2 + 1 & -\sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \\ -\sin \alpha_2 \cos \alpha_2 & \cos^2 \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

und

$$\mathbf{K}_L = k_w \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha_1 + 1 & -\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \\ -\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 & \cos^2 \alpha_1 \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

Die Matrizen, die aus dem Kontakt der Walze mit der Stoffbahn resultieren, sind mit \mathbf{D}_P und \mathbf{K}_P bezeichnet. Sie sind im allgemeinen nicht symmetrisch.

2.2.2 Schwingungsverhalten bei ungedämpftem Modell der Stoffbahn

Es soll zunächst das Schwingungsverhalten der Walze um den in 2.1.2 untersuchten stationären Zustand analysiert werden. Damit ist in diesem Abschnitt $\mathbf{D}_P = \mathbf{0}$. Nach der Linearisierung der Integralterme in den

Bewegungsgleichungen ergibt sich für die Matrix \mathbf{K}_P , die aus dem Kontakt mit der Stoffbahn resultiert,

$$\mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} 0 & f_P(k_{p,x}^*, a) \\ 0 & 2k_{p,y} \sqrt{-\frac{q_0(q_0-2R_0)}{R_0^2}} R_0 \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Die Matrix koppelt die Bewegungsgleichungen einseitig. Damit induzieren Bewegungen in q_y Kräfte in x -Richtung, während dies umgekehrt nicht der Fall ist. Der Kopplungsterm $f_P(k_{p,x}^*, a)$ ist hierbei abhängig von den Eigenschaften der Stoffbahn in Bahnrichtung. Für $a = 0$ ergibt sich

$$f_P(k_{p,x}^*, 0) = \frac{4k_{p,x}^* \left(R_0 \sqrt{-\frac{q_0(q_0-2R_0)}{R_0^2}} + (q_0 - R_0) \left(\pi - \arccos \left(\frac{q_0}{R_0} - 1 \right) \right) \right)}{2 \arcsin \left(\frac{q_0 - R_0}{R_0} \right) + \pi} \quad (2.57)$$

und der Verlauf von $f_P(k_{p,x}^*, a)$ als Funktion von a ist mit den Parametern aus Tabelle 2.1 in Bild 2.11 gezeigt. Die Eigenschaft der Stoffbahn, dass die Steifigkeit in Bahnrichtung qualitativ von der Kompression abhängt, ist keine notwendige Bedingung für die einseitige Kopplung der Bewegungsgleichungen, nimmt aber starken Einfluss darauf. Berücksichtigt man, dass $\gamma_a = \gamma_a(q_y)$ und $\gamma_b = \gamma_b(q_y)$ gilt, kann die einseitige Kopplung des Systems schon in (2.30) und (2.31) abgelesen werden. Eine weitere Auffälligkeit der Matrix \mathbf{K}_P ist, dass die Walze durch den Kontakt mit der Stoffbahn keine Rückstellung in q_x erfährt. Dies resultiert aus der durch die hohen Produktionsgeschwindigkeiten begründeten Annahme, dass sich zu jedem Zeitpunkt ein quasistationärer Zustand einstellt.

Aufgrund der Struktur und der Abhängigkeit des Kopplungsterms $f_P(k_{p,x}^*, a)$ von den Eigenschaften der Stoffbahn in Bahnrichtung, hat die Matrix \mathbf{K}_P starke Auswirkungen auf das Schwingungs- bzw. Stabilitätsverhalten des Systems. Dieser Zusammenhang soll nachfolgend anhand verschiedener

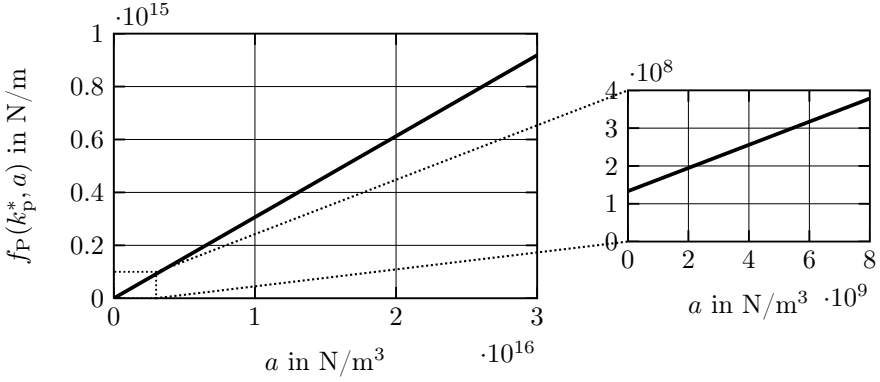


Bild 2.11: Kopplungsterm der Bewegungsgleichungen als Funktion von a

Konfigurationen in der Lagerung der Walze untersucht werden. Die Definition von Stabilität ist im Sinne LIAPOUNOVs zu verstehen.

Fall A: $\alpha_1 = 0$, $d_w = 0$

Im einfachsten Fall kann die Dämpfung in der Lagerung der Walze vernachlässigt werden und mit $\alpha_1 = 0$ stehen die Federelemente exakt senkrecht aufeinander. Es ist $\mathbf{D}_L = \mathbf{0}$ und (2.53) vereinfacht sich zu

$$\begin{bmatrix} m_w & 0 \\ 0 & m_w \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} k_w & f_P(k_{P,x}^*, a) \\ 0 & k_w + 2k_{P,y} \sqrt{-\frac{q_0(q_0 - 2R_0)}{R_0^2}} R_0 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.58)$$

Für die gegebene Struktur von (2.58) ist das betrachtete System nur bei gleichen Einträgen auf der Hauptdiagonalen der Steifigkeitsmatrix instabil. Für diesen Fall ist die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte größer als die geometrische Vielfachheit und die Eigenvektoren des zu (2.58) gehörenden Systems erster Ordnung sind nicht mehr linear unabhängig. Hierdurch entstehen bei der Transformation des Systems erster Ordnung auf Normalform JORDAN-Blöcke. In Konsequenz würden die Bewegungen in q_y

zu einer Anregung in Resonanz in q_x führen. Allerdings gilt für die Parameter aus Tabelle 2.1 immer

$$k_w \neq k_w + 2k_{p,y} \sqrt{-\frac{q_0(q_0 - 2R_0)}{R_0^2}} R_0. \quad (2.59)$$

Damit ist das System in dem hier betrachteten Fall stabil. Dennoch werden aufgrund der Kopplung $f_P(k_{p,x}^*, a)$ für große a bei Anfangsbedingungen in q_y oder \dot{q}_y große Kräfte in q_x induziert. Es kann dadurch zu großen Auslenkungen in q_x kommen.

Fall B: $\alpha_1 = 1^\circ \approx 0.017 \text{ rad}$, $d_w = 0$

Ausgehend von System (2.58) können kleine Änderungen in der Lagerung der Walze, die eine Vollbesetzung der Matrix \mathbf{K}_P zur Folge haben, zu einer Instabilität des Systems führen. Mit $\alpha_1 = 1^\circ = 0.017 \text{ rad}$ ergibt sich für die Bewegungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} m_w & 0 \\ 0 & m_w \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \left(k_w \begin{bmatrix} 1.0003 & -0.017 \\ -0.017 & 0.9997 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & f_P(k_{p,x}^*, a) \\ 0 & 2k_{p,y} \sqrt{\frac{q_0(2R_0 - q_0)}{R_0^2}} R_0 \end{bmatrix} \right) \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.60)$$

Eine Stabilitätsanalyse kann jetzt anhand der Eigenwerte des Systems durchgeführt werden. Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, das sich aus

$$\det(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_P) = 0 \quad (2.61)$$

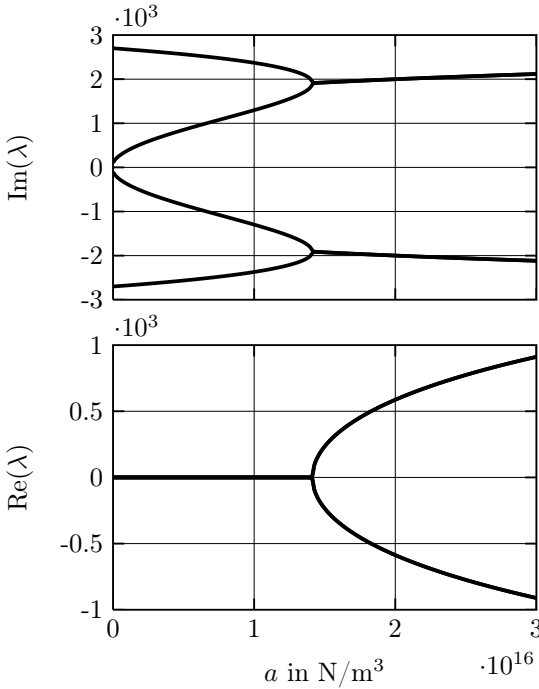


Bild 2.12:

Eigenwerte des
ungedämpften Systems
bei nicht exakt senkrecht
aufeinander stehenden
Federelementen in der
Lagerung der Walze

ergibt. Zusätzlich zu den Parametern der Tabelle 2.1 wird für die Masse der Walze $m_w = 6500 \text{ kg}$ verwendet und für die Steifigkeit $k_w = m_w(2\pi 17)^2 \text{ N/m}$ eingeführt. Diese Parameter können nach VAN HAAG [15] exemplarisch für Papierkalanders angesetzt werden. Bild 2.12 zeigt den Verlauf der Eigenwerte als Funktionen von a . In der oberen Graphik der Abbildung ist der Verlauf der Imaginärteile dargestellt. Die untere Graphik im Bild 2.12 zeigt den Verlauf der Realteile. Für ansteigendes a ist zu erkennen, dass die Imaginärteile aufeinander zulaufen. Treffen sich die Imaginärteile, entstehen sofort positive Realteile, die dann sehr schnell anwachsen. Der Instabilitätsmechanismus entspricht, aufgrund der Struktur der Gleichungen, qualitativ dem von HOFFMANN in [20] diskutierten Instabilitätsmechanismus. Damit wird es bei Anfangsbedingungen in q_y schon bevor die Stabilitätsgrenze erreicht wird zu einer Schwebung mit einer starken Amplitudenüberhöhung in q_x kommen. Eine interessante Erkenntnis ist, dass die Frequenz der zu erwartenden

aufklingenden Schwingungen trotz der relativ niedrigen Steifigkeit in der Lagerung der Walze bei ca 320 Hz liegt. Diese Frequenz liegt in der Größenordnung der Frequenzen, die in der Praxis bei plötzlich auftretenden Schwingungen an Papierkalandern beobachtet werden. Die Größenordnungen von a , für welche die Instabilitäten auftreten, liegen deutlich unter den aus Abschnitt 2.1.2 als zulässig ermittelten Werten. Zudem sei an dieser Stelle veranschaulicht, dass die maximale Steifigkeit in Bahnrichtung bei $a = 1.5 \times 10^{16} \text{ N/m}^3$ und der maximalen Kompression q_0 , $k_{p,x} = 2.575 \times 10^{12} \text{ N/m}^2$ beträgt. Im Vergleich mit $k_{p,x}^*$ aus Tabelle 2.1 ist dies keine merkliche Überhöhung und wird als realistisch angesehen.

Fall C: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1^\circ \approx 0.017 \text{ rad}$, $d_w = 5 \times 10^4 \text{ Ns/m}$

Nicht nur bei einer Vollbesetzung der Matrix \mathbf{K}_P sind Instabilitäten des Systems zu erwarten. Eine Vollbesetzung der aus der Lagerung der Walze resultierenden Dämpfungsmatrix \mathbf{D}_P kann ebenfalls zum Auftreten von Eigenwerten mit positivem Realteil führen. Dies kann nachgewiesen werden, indem mit $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 1^\circ$ der Fall senkrecht zueinander stehender Federelemente und nicht senkrecht zueinander stehender Dämpferelemente in der Lagerung untersucht wird. Mit $d_w = 5 \times 10^4 \text{ Ns/m}$ ist ein kleiner Dämpfungskoeffizient angenommen. Für die Bewegungsgleichungen ergibt sich

$$\begin{bmatrix} m_w & 0 \\ 0 & m_w \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + d_w \begin{bmatrix} 1.0003 & -0.017 \\ -0.017 & 0.9997 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} k_w & f_P(k_{p,x}^*, a) \\ 0 & k_w + 2k_{p,y} \sqrt{\frac{q_0(2R_0 - q_0)}{R_0^2}} R_0 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{0} . \quad (2.62)$$

Die Eigenwerte sind in Bild 2.13 als Funktionen von a aufgetragen. Entgegen dem Verlauf der Eigenwerte bei vollbesetzter Steifigkeitsmatrix, bleiben hier

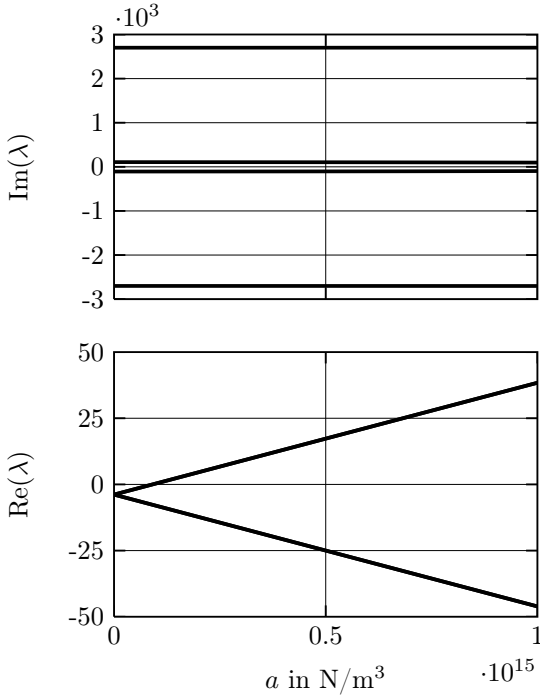


Bild 2.13:
Einfluss der Dämpfung
in der Lagerung der
Walze auf das
Stabilitätsverhalten des
Systems

die Imaginärteile konstant. Dennoch wächst ein Realteil linear an. Es kommt bei vollbesetzter Matrix \mathbf{D}_L bei wesentlich geringeren Werten von a zum Auftreten positiver Realteile.

Als nächstes wird für den Fall, dass weder die Federelemente noch die Dämpferelemente der Lagerung senkrecht aufeinander stehen, untersucht, ob eine Erhöhung von d_w einen stabilisierenden Effekt hat. Die Bewegungsgleichungen für diesen Fall lauten

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_L\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_P)\mathbf{q} = \mathbf{0} . \quad (2.63)$$

mit jetzt

$$\mathbf{D}_L = d_w \begin{bmatrix} 1.0003 & -0.017 \\ -0.017 & 0.9997 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{K}_L = k_w \begin{bmatrix} 1.0003 & -0.017 \\ -0.017 & 0.9997 \end{bmatrix} . \quad (2.64)$$

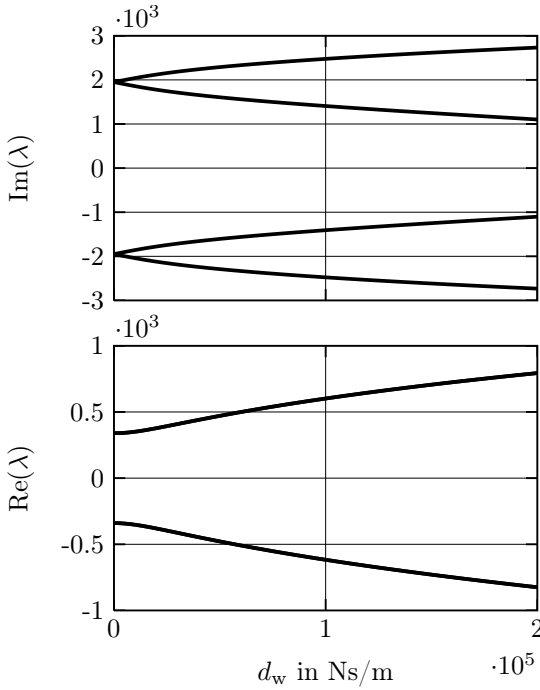


Bild 2.14:

Eigenwerte als Funktion der Lagerdämpfung bei nicht senkrecht aufeinander stehenden Feder- und Dämpferelementen in der Lagerung der Walze

Im Ausgangszustand ist $a = 1.5 \times 10^{16} \text{ N/m}^2$. Damit wird von einer instabilen Konfiguration ausgegangen. Bild 2.14 zeigt den Verlauf der Eigenwerte als Funktion von d_w . Es zeigt sich, dass eine Erhöhung der Lagerdämpfung in dem hier betrachteten Fall keine stabilisierende Wirkung hat. Im Gegenteil wachsen die positiven Realteile weiter an.

Fall D: $\alpha_1 = 1^\circ \approx 0.017 \text{ rad}$ $\alpha_2 = 0$, $d_w \neq 0$

Im letzten Fall der Analyse des Schwingungsverhaltens der Walze bei ungedämpftem Modell der Stoffbahn wird untersucht, ob eine Erhöhung der Einträge auf der Hauptdiagonalen der Dämpfungsmatrix eine stabilisierende Wirkung hat. Die Bewegungsgleichungen sind

$$M\ddot{q} + D_L\dot{q} + (K_L + K_P)q = 0. \quad (2.65)$$

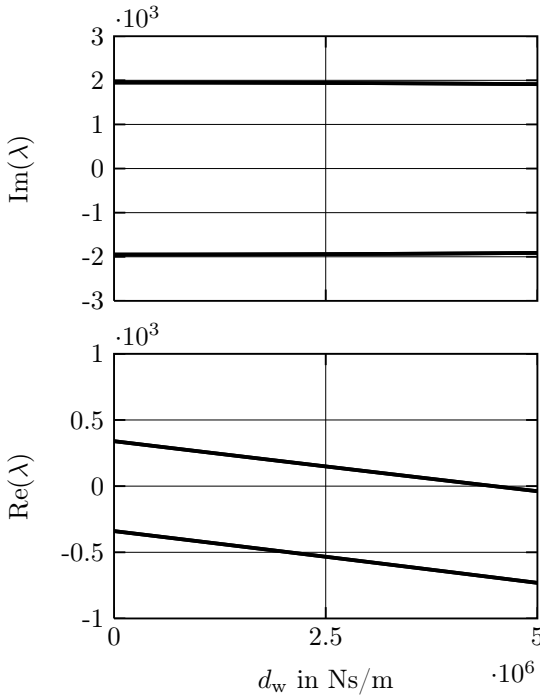


Bild 2.15:

Eigenwerte bei einer Erhöhung der Einträge auf der Hauptdiagonalen der Dämpfungsmatrix

mit jetzt

$$\mathbf{D}_L = \begin{bmatrix} d_w & 0 \\ 0 & d_w \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{K}_L = k_w \begin{bmatrix} 1.0003 & -0.017 \\ -0.017 & 0.9997 \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Mit $a = 1.5 \times 10^{16} \text{ N/m}^2$ wird wieder von einer instabilen Konfiguration ausgegangen. Bild 2.15 zeigt den Verlauf der Eigenwerte als Funktionen von d_w . Es wird deutlich, dass eine Erhöhung der Einträge auf der Hauptdiagonalen der Dämpfungsmatrix einen stabilisierenden Effekt hat.

2.2.3 Schwingungsverhalten bei gedämpftem Modell der Stoffbahn

Nachdem das Schwingungsverhalten um den stationären Zustand bei dem ungedämpften Modell der Stoffbahn untersucht wurde, soll jetzt der Einfluss von Energiedissipation in der Stoffbahn analysiert werden. Mit $\alpha_1 = 1^\circ$, $d_w = 0$ und $a = 1.5 \times 10^{16} \text{ N/m}^3$ wird, entsprechend Fall A des Abschnitts 2.2.2, von einem instabilen Systemverhalten ausgegangen. Wie in Abschnitt (2.1.3) beschrieben, muss bei einer Änderung des Parameters d_p der Auslauf der Stoffbahn γ_b und damit der stationäre Zustand neu berechnet werden. Übertragen auf den dynamischen Fall bedeutet dies, dass für jede Iteration des Dämpfungskoeffizienten der Stoffbahn die Linearisierung neu durchgeführt werden muss und sich damit neue Einträge in den Matrizen \mathbf{K}_P und \mathbf{D}_P ergeben. Hierbei bleibt die Struktur von \mathbf{K}_P immer erhalten, so dass das System einseitig gekoppelt ist. Für die Matrix \mathbf{D}_P gilt stets $\mathbf{D}_P \neq \mathbf{D}_P^T$. Sie ist außerdem voll besetzt. Bild 2.16 zeigt den Verlauf der Eigenwerte als Funktion in Abhängigkeit der Energiedissipation in der Stoffbahn. Es zeigt sich für das Modell der Stoffbahn mit Dämpfung generell ein stabilisierender Einfluss, wenn die Dämpfung erhöht wird. Allerdings ist der Einfluss bei Erreichen der in Abschnitt 2.1.3 angegebenen Werte von d_p klein.

2.3 Diskussion der Ergebnisse

Die in diesem Kapitel entwickelte Modellierung und die durchgeführten Analysen machen deutlich, wie das Schwingungsverhalten der Walzen eines Papierkalenders durch die Gegebenheiten im Kontaktbereich beeinflusst wird. Aufgrund der Tatsache, dass eine Bewegung der Walze in Dickenrichtung Kräfte auf die Walze in Bahnrichtung induziert, kommt es zu einer einseitigen Kopplung der Bewegungsgleichungen. Dieser Zusammenhang kann bei mechanischen Eigenschaften der Walze, aus denen eine Vollbesetzung der die Struktur der Walze beschreibenden Matrizen resultiert, ursächlich zu einer Selbsterregung des Systems mit sehr schnell aufklingenden Amplituden führen. Die vorgestellte Modellierung zeigt, dass weder Reibung noch eine

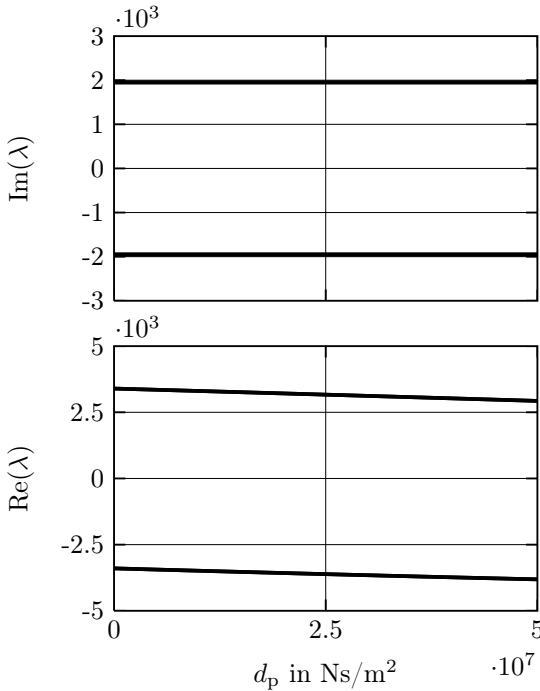


Bild 2.16:

Einfluss der Dämpfung
in der Stoffbahn auf das
Stabilitätsverhalten des
Systems

plastische Verformung der Papierbahn für das Auftreten der einseitigen Kopplung notwendig ist. Entscheidend für die Selbsterregung sind die Beträge der Kräfte, die durch die Kompression der Stoffbahn auf die Walze in Bahnrichtung induziert werden. Im hier betrachteten Fall des vollständigen Haftens zwischen der Papierbahn und der Walzenoberfläche werden diese Beträge entscheidend durch die mechanischen Eigenschaften der Stoffbahn in Bahnrichtung bestimmt. Es ist bemerkenswert, dass die hier vorgestellte Modellierung bereits unter der Annahme einer starren Walze und für relativ niedrige Steifigkeiten in der Lagerung der Walze sowie bei realistischen Parametern für die Stoffbahn selbsterregte Schwingungen bei Frequenzen in der selben Größenordnung zeigt, wie sie auch aus der Praxis für Papierkalander bekannt sind.

Die durchgeführten Parameterstudien zeigen qualitativ, wie die Dämpfungseigenschaften der Lagerung oder allgemein die

Dämpfungseigenschaften der mechanischen Struktur der Walze das Stabilitätsverhalten beeinflussen. Dämpfung in der Walze hat hierbei nur dann einen positiven Einfluss, wenn es gelingt, maßgeblich die Einträge auf der Hauptdiagonalen der Dämpfungsmatrix zu erhöhen. Eine Energiedissipation in der Stoffbahn hat im hier vorgestellten Rahmen der Modellierung einen stabilisierenden Einfluss.

3 Modellierung

verschleißbedingter

Schwingungsphänomene

Gegenstand dieses Kapitels ist, eine Modellierung einzuführen, die es erlaubt, die Zusammenhänge zwischen der Systemdynamik eines Papierkalenders und der Entwicklung von Verschleißmustern zu untersuchen. Es wird eine Methodik vorgestellt, die auf eine geschlossene Systembeschreibung durch lineare Differentialgleichungen führt.

Es wird zunächst der einfache Fall einer starr gelagerten und rotierenden Walze, deren Oberfläche aufgrund einer harmonischen Kraft verschleißt, betrachtet. Die Modellierung wird dann auf den dynamischen Fall einer elastisch gelagerten Walze erweitert. Als nächstes wird ein Modell mit zwei dynamischen Freiheitsgraden und Oberflächenverschleiß vorgestellt.

3.1 Fest gelagerte Walze mit Oberflächenverschleiß

Bild 3.1 zeigt das Modell einer Walze, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω rotiert. Die Walze befindet sich im reibungsfreien Kontakt mit einem Stößel, der mit einer Kraft $F(t)$ gegen die Oberfläche des Zylinders gedrückt wird. Im Kontakt sollen keine negativen Kräfte übertragen werden können. Deshalb ist

$$F(t) = F_0 + A \cos(\eta\Omega t) + B \sin(\eta\Omega t) \quad (3.1)$$

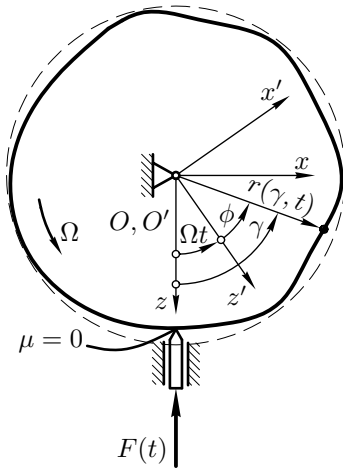


Bild 3.1:

Modell eines festgelagerten, rotierenden Zylinders mit Oberflächenverschleiß

mit

$$F_0 > \sqrt{A^2 + B^2} . \quad (3.2)$$

In diesem Abschnitt ist η das Verhältnis der Frequenz der harmonischen Kraft zur Drehfrequenz des Zylinders.

Anhand des Modells soll der Modellierungsansatz für Oberflächenverschleiß grundlegend eingeführt werden. Das Modell soll zeigen, wie es bei Papierkalandern aufgrund äußerer Wechsellasten zu einer Barringbildung kommen kann. Äußere Wechsellasten entstehen zum Beispiel durch den Zahneingriff von Getrieben, die einen Motor mit der Walze verbinden.

3.1.1 Konstitutive und Systemgleichungen

Die sich in Abhängigkeit der Zeit verändernde Kontur der Oberfläche ist im nichtrotierenden Koordinatensystem O mit

$$r(\gamma, t) = R_0 + \hat{r}(\gamma, t) \quad (3.3)$$

durch den Winkel γ parametrisiert. Um die zeitliche Änderung der Kontur des Zylinders zu erfassen, wird jetzt ein Verschleißgesetz eingeführt. In allen von MENG und LUDEMA in [30] zusammengetragenen Modellierungsansätzen

für Verschleiß hat die Kraft auf eine Oberfläche maßgeblichen Einfluss. Dahingehend wird hier zur phänomenologischen Modellierung davon ausgegangen, dass die Geschwindigkeit der Formänderung des Rotors am Kontaktpunkt proportional zu den Kontaktkräften ist. Unter dieser Annahme wird die Oberfläche des Zylinders als Kontinuum mit verteilter viskoser Dämpfung, aber ohne Rückstellung modelliert. Folglich ist es möglich, das Prinzip der virtuellen Arbeiten auf die Oberfläche des Rotors anzuwenden. Hierbei ist zu beachten, dass eine Zeitableitung von $r(\gamma, t)$ in der materiellen Koordinate $\phi = \gamma - \Omega t$ zu erfolgen hat. Damit ist $\gamma = \phi + \Omega t$ und es ergibt sich die partielle Differentialgleichung

$$V \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial r(\gamma, t)}{\partial t} + \Omega \frac{\partial r(\gamma, t)}{\partial \gamma} \right) \delta r(\gamma, t) d\gamma + F(t) \delta r(0, t) = 0. \quad (3.4)$$

Die Konstante V ist hierbei ein Maß für den Widerstand der Oberfläche gegen Verschleiß. Die Funktion $r(\gamma, t)$ kann, ähnlich dem Vorgehen bei der Anwendung des Verfahrens nach RITZ, durch

$$r(\gamma, t) \approx R_0 + \sum_{i=1}^k R_i(\gamma) q_i(t), \quad (3.5)$$

approximiert werden. Setzt man (3.5) in (3.4) ein und berücksichtigt, dass

$$\delta r(\gamma, t) \approx \sum_{i=1}^k R_i(\gamma) \delta q_i(t) \quad (3.6)$$

gilt, erhält man bei beliebig wählbaren Funktionen $\delta q_i(t)$ ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\mathbf{Y} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{Z} \mathbf{x} = \mathbf{f} F(t) \quad (3.7)$$

mit

$$\mathbf{x} = [q_1(t), \dots, q_k(t)]^T. \quad (3.8)$$

Die generischen Einträge der Systemmatrizen sind

$$y_{i,j} = V \int_0^{2\pi} R_i(\gamma) R_j(\gamma) d\gamma \quad i, j = 1, \dots, k \quad (3.9)$$

und

$$z_{i,j} = V\Omega \int_0^{2\pi} R'_i(\gamma) R_j(\gamma) d\gamma \quad i, j = 1, \dots, k. \quad (3.10)$$

Der Eingangsvektor ergibt sich zu

$$\mathbf{f} = [R_i(0), \dots, R_k(0)]^T. \quad (3.11)$$

Die im Ansatz (3.5) zu verwendenden Ansatzfunktionen $R_i(\gamma)$ müssen vollständig sein, d.h. sie müssen alle möglichen Konturen der Oberfläche, inklusive eines Abnehmens des Radius, abbilden können. Ferner müssen sie aufgrund der Einträge in den Systemmatrizen quadratisch integrierbar sein und es muss $R_i(0) = R_i(\gamma)$ gelten. Unter diesen Voraussetzungen und aufgrund der Tatsache, dass die Kontur der Walze zu jedem Zeitpunkt t eine 2π -periodische Funktion darstellt, werden

$$R_1(\gamma) = 1 \quad (3.12)$$

und

$$R_i(\gamma) = \cos\left(\frac{i+2}{2}\gamma\right) \quad \text{für } i = 2, 4, 6, \dots, k-1 \quad (3.13)$$

sowie

$$R_i(\gamma) = \sin\left(\frac{i+1}{2}\gamma\right) \quad \text{für } i = 3, 5, 7, \dots, k \quad (3.14)$$

verwendet. Anhand von (3.9), (3.10), (3.11) und aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften der Ansatzfunktionen kann man erkennen, dass für beliebiges k in \mathbf{Y} lediglich die Hauptdiagonale besetzt ist. Des Weiteren sind in \mathbf{Z} die erste obere sowie die erste untere Nebendiagonale so besetzt, dass die erste Differentialgleichung vom Rest des Systems entkoppelt ist. Alle anderen Differentialgleichungen sind paarweise entkoppelt. Für das hier behandelte Modell genügt es, eine limitierte Anzahl von Ansatzfunktionen

$$R_1(\gamma) = 1, \quad (3.15)$$

$$R_2(\gamma) = \cos(p\gamma) \quad (3.16)$$

und

$$R_3(\gamma) = \sin(p\gamma) \quad (3.17)$$

mit $p \in \mathbb{N}^+$ zu verwenden. Die Lösung von

$$\begin{bmatrix} 2\pi V & 0 & 0 \\ 0 & \pi V & 0 \\ 0 & 0 & \pi V \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p\pi V\Omega \\ 0 & -p\pi V\Omega & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} F(t) \quad (3.18)$$

lässt Rückschlüsse auf das gesamte Systemverhalten zu. Obwohl die erste Zeile in (3.18) vom Rest der Gleichungen entkoppelt ist, wird das Differentialgleichungssystem im Folgenden als solches behandelt.

3.1.2 Lösung des Differentialgleichungssystems

Damit ermittelt werden kann, wie sich die Oberfläche der Walze aufgrund der harmonischen Kraft entwickelt, wird das Differentialgleichungssystem (3.18) gelöst. Aufgrund der Linearität des Systems gilt das Superpositionsprinzip und es kann die Lösung für

$$F(t) = A \cos(\eta\Omega t) + B \sin(\eta\Omega t) \quad (3.19)$$

gesondert ermittelt werden. Die Lösung setzt sich aus dem homogenen und dem partikulären Anteil zusammen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p . \quad (3.20)$$

Der Anteil \mathbf{x}_h kann gefunden werden, indem man das Eigenwertproblem

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda)\mathbf{u} = 0 \quad (3.21)$$

mit

$$\mathbf{A} = -\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Z} \quad (3.22)$$

und der Einheitsmatrix \mathbf{I} löst. Dies liefert die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -ip\Omega$ und $\lambda_3 = ip\Omega$ sowie die Matrix der Eigenvektoren

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \quad (3.23)$$

Damit kann für die homogene Lösung von (3.18)

$$\mathbf{x}_h = \boldsymbol{\psi} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C \\ \underline{C} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

geschrieben werden. Die Konstanten C und \underline{C} sind konjugiert komplex zueinander. Mit

$$\begin{aligned} C &= C_2 - iC_3 , \\ \underline{C} &= C_2 + iC_3 \end{aligned} \quad (3.25)$$

ergibt sich in reeller Schreibweise

$$\mathbf{x}_h = \begin{bmatrix} C_1 \\ -2C_2 \sin(pt\Omega) - 2C_3 \cos(pt\Omega) \\ 2C_2 \cos(pt\Omega) - 2C_3 \sin(pt\Omega) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Für die partikuläre Lösung von (3.18) wird ein Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{d}_a \cos(\eta\Omega t) + \mathbf{d}_b \sin(\eta\Omega t) \quad (3.27)$$

gemacht. Die Koeffizienten

$$\mathbf{d}_a = [D_{1,a}, D_{2,a}, D_{3,a}]^\top \quad (3.28)$$

und

$$\mathbf{d}_b = [D_{1,b}, D_{2,b}, D_{3,b}]^\top \quad (3.29)$$

können durch einsetzen von (3.27) in (3.18) bestimmt werden. Durch einen Koeffizientenvergleich erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -2\pi V\eta\Omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi V\eta\Omega & 0 & 0 & 0 & p\pi V\Omega \\ 0 & 0 & -\pi V\eta\Omega & 0 & -p\pi V\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\pi V\eta\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p\pi V\Omega & 0 & \pi V\eta\Omega & 0 \\ 0 & -p\pi V\Omega & 0 & 0 & 0 & \pi V\eta\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_a \\ \mathbf{d}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{f}B \\ -\mathbf{f}A \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

dessen Lösung \mathbf{d}_a und \mathbf{d}_b liefert. Es ergibt sich

$$\mathbf{d}_a = \left[\frac{B}{2\pi V\eta\Omega}, -\frac{B\eta}{\pi V\Omega (p^2 - \eta^2)}, -\frac{Ap}{\pi V\Omega (p^2 - \eta^2)} \right]^\top \quad (3.31)$$

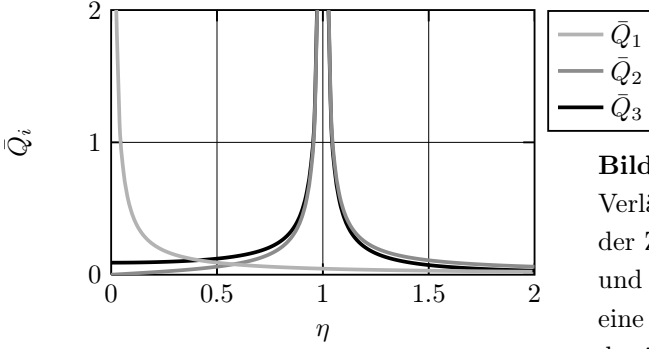
und

$$\mathbf{d}_b = \left[-\frac{A}{2\pi V \eta \Omega}, \frac{A\eta}{\pi V \Omega (p^2 - \eta^2)}, -\frac{Bp}{\pi V \Omega (p^2 - \eta^2)} \right]^\top \quad (3.32)$$

Mit dem Verhältnis zwischen der Frequenz der Kraft und der Drehfrequenz der Walze η lässt sich bereits hier erkennen, dass $D_{1,a}$ und $D_{1,b}$ für $\eta = 0$ sowie $D_{2,a}$, $D_{2,b}$, $D_{3,a}$ und $D_{3,b}$ für $\eta = p$ eine Unendlichkeitsstelle besitzen. Unabhängig von der homogenen Lösung von (3.18) wird im Fall von $\eta = 0$, was wieder einer konstanten Kraft entspricht, $q_1(t)$ linear in der Zeit über alle Grenzen wachsen. Hier wird der Radius des Zylinders stetig abnehmen. Im Fall von $\eta = p$ werden $q_2(t)$ und $q_3(t)$ linear in der Zeit über alle Grenzen wachsen. Damit kann ausgesagt werden, dass bei einem ganzzahligen Vielfachen zwischen der Frequenz der harmonischen Kraft, die auf die Zylinderoberfläche wirkt, und der Drehfrequenz des Zylinders, sich aufgrund von $p \in \mathbb{N}^+$ ein Verschleißmuster mit einer bestimmten Wellenlänge auf der Walzenoberfläche ausprägen wird. Die Anzahl der Wellen über dem Umfang sind dabei durch das ganzzahlige Vielfache η gegeben. Dies gilt unabhängig von der Amplitude der äußeren Kraft. Allerdings ist die Amplitude maßgeblich für die Wachstumsrate des Wellenmusters. Zur Visualisierung des Zusammenhangs werden in Bild 3.2 beispielhaft die Verläufe der Amplituden der partikulären Lösung bezogen auf eine beliebige Amplitude einer harmonischen Kraft mit $V = 10 \text{ Ns/m}$, $\Omega = 35 \text{ rad/s}$ und $p = 1$ dargestellt. Für das Bild ist

$$\bar{Q}_1 = \frac{\sqrt{D_{1,a}^2 + D_{1,b}^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\pi V \Omega \eta}, \quad (3.33)$$

$$\bar{Q}_2 = \frac{\sqrt{D_{2,a}^2 + D_{2,b}^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\sqrt{2}\eta}{\pi V \Omega (p^2 - \eta^2)} \quad (3.34)$$


Bild 3.2:

Verläufe der Amplituden der Zustände $q_1(t)$, $q_2(t)$ und $q_3(t)$ bezogen auf eine beliebige Amplitude der äußeren Kraft

und

$$\bar{Q}_3 = \frac{\sqrt{D_{3,a}^2 + D_{3,b}^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\sqrt{2}p}{\pi V \Omega (p^2 - \eta^2)}. \quad (3.35)$$

Als nächstes wird das Verhalten des Systems in der Nähe von $\eta = p$ untersucht. Für diesen Fall muss die homogene Lösung berücksichtigt werden. Die Koeffizienten C_1 , C_2 und C_3 können an die Anfangsbedingungen $q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = 0$ angepasst werden. Es ergibt sich

$$C_1 = -\frac{B}{2\pi V \eta \Omega}, \quad (3.36)$$

$$C_2 = -\frac{B\eta}{2\pi V \Omega (p^2 - \eta^2)} \quad (3.37)$$

und

$$C_3 = \frac{Ap}{2\pi V \Omega (p^2 - \eta^2)}. \quad (3.38)$$

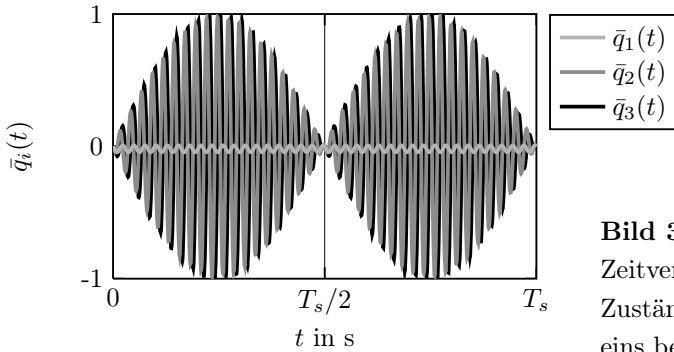


Bild 3.3:
Zeitverläufe der
Zustände normiert auf
eins bei $\eta = 0.95$

Anhand der Argumente der trigonometrischen Funktionen in (3.26) und (3.27) erkennt man, dass sich in den Zeitverläufen für $q_2(t)$ und $q_3(t)$ harmonische Funktionen unterschiedlicher Frequenzen überlagern. Aufgrund von \mathbf{d}_a und \mathbf{d}_b sowie C_1 , C_2 und C_3 kommt es zu einer unreinen Schwebung in den Zeitverläufen. Die Periodendauer kann, unabhängig der Amplitude der Kraft die auf den Zylinder wirkt, in der Nähe von $\eta = p$ gut mit der Periodendauer einer reinen Schwebung

$$T_s = \frac{4\pi}{\Omega(p - \eta)} \quad (3.39)$$

abgeschätzt werden. In Bild 3.3 finden sich beispielhaft die auf eins normierten Zeitverläufe von $q_1(t)$, $q_2(t)$ und $q_3(t)$ für $V = 10$ Ns/m, $\Omega = 35$ rad/s und $p = 1$ sowie $A = B = 1$ und $\eta = 0.95$. Es wird sich in der Nähe der Unendlichkeitsstelle $\eta = p$ stets ein Wellenmuster mit einer bestimmten Wellenlänge aufbauen und danach wieder verschwinden. Je näher η an p liegt, desto länger ist die Zeit in der ein Wellenmuster wächst und desto größer die maximale Amplitude des Wellenmusters. Dieser Zusammenhang kann bereits dazu führen, dass sich ein Barringproblem aufgrund äußerer Wechsellasten ergibt, obwohl die Frequenz der Wechsellasten noch kein ganzzahliges Vielfaches der Drehfrequenz der Walze ist.

3.2 Elastisch gelagerte Walze mit Oberflächenverschleiß

Das in Abschnitt 3.1 vorgestellte Modell einer festgelagerten rotierenden Walze mit Oberflächenverschleiß kann die prinzipiellen Zusammenhänge bei der Entstehung von Barring aufgrund äußerer Wechsellasten erklären. In diesem Abschnitt erfolgt die Erweiterung der Modellierung auf den dynamischen Fall. Es wird von dem in Bild 3.4 gezeigten Modell ausgegangen. Jetzt wird eine Bewegung des Walzenmittelpunktes in vertikaler Richtung zugelassen, die Position ist durch $q_w(t)$ gegeben. Der Walzenmittelpunkt ist auf einer elastischen Feder der Steifigkeit k_w gelagert. Die Oberfläche des Rotors ist weiterhin in Kontakt mit einem reibungsfreien Stößel. Der Stößel ist auf einer elastischen Feder der Steifigkeit k_p gelagert, die eine allgemeine Steifigkeit des Kontaktbereiches abbildet. Es sollen am Kontaktpunkt nur positive Kräfte zulässig sein. Das wird erreicht, indem eine Kraft F_0 auf den Mittelpunkt der Walze wirkt, die das System vorspannt. Damit der Einfluss von Dämpfung in den Lagern untersucht werden kann, ist jeder Feder des Systems ein linearer viskoser Dämpfer parallel geschaltet. Die Dämpfungskoeffizienten sind d_w bzw. d_p .

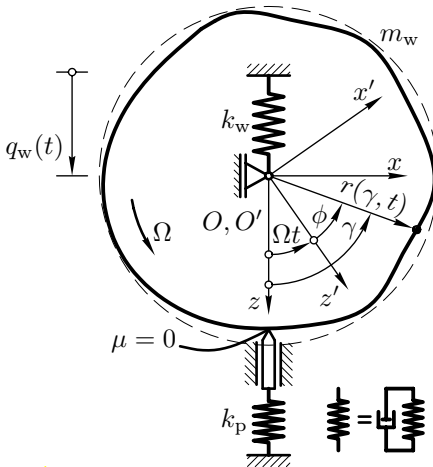


Bild 3.4:

Modell einer elastisch gelagerten Walze mit Oberflächenverschleiß

Weiterhin wird davon ausgegangen, dass der Materialabtrag durch den Oberflächenverschleiß klein ist. Damit wird die Masse der Walze m_w als konstant angesehen. Für die Parametrisierung der Walzenoberfläche im nichtrotierenden Koordinatensystem O sowie der phänomenologischen Verschleißmodellierung gelten die Angaben aus Abschnitt 3.1.

Anhand des Modells kann gezeigt werden, wie es zu Wechselwirkungen zwischen der Systemdynamik und der Ausprägung von Verschleißmustern kommen kann. Des Weiteren kann untersucht werden, welchen Einfluss einzelne Systemparameter auf die Ausprägung von Verschleißmustern haben.

3.2.1 Konstitutive und Systemgleichungen

Gemäß dem zweiten NEWTONschen Gesetz ergibt sich für die Bewegung des Walzenmittelpunktes

$$\begin{aligned}
 m\ddot{q}_w(t) + k_w q_w(t) + d_w \dot{q}_w(t) \\
 + d_p \left(\dot{q}_w(t) + \frac{\partial r(0, t)}{\partial t} + \Omega \frac{\partial r(0, t)}{\partial \gamma} \right) \\
 + k_p (q_w(t) + r(0, t) - R_0) = F_0 . \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Beachtet man wieder, dass die Ableitung nach der Zeit von $r(\gamma, t)$ in materiellen Koordinaten zu erfolgen hat, lautet das Prinzip der virtuellen Arbeit für den Walzenmantel

$$\begin{aligned}
 V \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial r(\gamma, t)}{\partial t} + \Omega \frac{\partial r(\gamma, t)}{\partial \gamma} \right) \delta r(\gamma, t) d\gamma \\
 + d_p \left(\dot{q}_w(t) + \frac{\partial r(0, t)}{\partial t} + \Omega \frac{\partial r(0, t)}{\partial \gamma} \right) \delta r(0, t) \\
 + k_p (q_w(t) + r(0, t) - R_0) \delta r(0, t) = 0 . \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

Setzt man den Ansatz (3.5) in (3.40) und (3.41) ein und schreibt die Differentialgleichung zweiten Grades für die Bewegung des Rotormittelpunktes mit $q_w(t) = q_{w,1}(t)$ und $\dot{q}_w(t) = q_{w,2}(t)$ in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung um, ergibt sich für das Gesamtsystem ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung der Form

$$\mathbf{Y}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{Z}\mathbf{x} = \mathbf{f}F_0. \quad (3.42)$$

Der Vektor

$$\mathbf{x} = [q_{w,1}(t), q_{w,2}(t), q_1(t), \dots, q_k(t)]^T \quad (3.43)$$

beinhaltet jetzt sowohl den Verschiebungs- und Geschwindigkeitszustand des Walzenmittelpunktes als auch diejenigen Zustände, welche die Form der Walzenoberfläche beschreiben. Die generischen Einträge der Matrix \mathbf{Y} ergeben sich zu

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

mit den Einträgen der Untermatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m_w \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Y}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ d_p R_1(0) & \dots & d_p R_k(0) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Y}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$y_{4,ij} = V \int_0^{2\pi} R_i(\gamma) R_j(\gamma) d\gamma + d_p R_i(0) R_j(0) \quad i, j = 1, \dots, k,$$

Ferner ergibt sich \mathbf{Z} zu

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

mit den Einträgen der Untermatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k_w + k_p & d_w + d_p \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Z}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ k_p R_1(0) + d_p R'_1(0) & \dots & k_p R_k(0) + d_p R'_k(0) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Z}_3 &= \begin{bmatrix} k_p R_1(0) & d_p R_1(0) \\ \vdots & \vdots \\ k_p R_k(0) & d_p R_k(0) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$z_{4,i,j} = V\Omega \int_0^{2\pi} R'_i(\gamma) R_j(\gamma) d\gamma + d_p \Omega R'_i(0) R_j(0) + k_p R_i(0) R_j(0)$$

$$i, j = 1, \dots, k.$$

Der Krafteingangsvektor ist jetzt

$$\mathbf{f} = [0, 1, 0, \dots, 0]^\top. \quad (3.48)$$

Für die homogene Lösung des Differentialgleichungssystems ergibt sich nach lösen des Eigenwertproblems der Form (3.21) mit der Matrix der Eigenvektoren $\boldsymbol{\psi}$ allgemein

$$\mathbf{x}_h = \boldsymbol{\psi} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_k t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_k \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Ein Ansatz vom Typ der rechten Seite für die partikuläre Lösung ist

$$\mathbf{x}_p = [D_1, \dots, D_k]^\top = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{f} F_0 = \text{konst.} \quad (3.50)$$

Aufgrund der konstanten Vorspannung ist die homogene Lösung entscheidend für die Ausprägung eines Verschleißmusters. Die Stabilität der homogenen Lösung gibt Aufschluss über die mit der Zeit anwachsenden Eigenvektoren. Bei dem Auftreten von Eigenwerten mit positiven Realteilen, kann deren Betrag als Maß für die Wachstumsrate eines Eigenvektors und damit eines Verschleißmusters betrachtet werden.

3.2.2 Analyse der homogenen Lösung

Damit ein Eindruck des Stabilitäts- bzw. Eigenverhaltens des in Abbildung 3.1 gezeigten Modells gewonnen werden kann, wird nachfolgend eine Analyse der Eigenwerte durchgeführt. Zu diesem Zweck werden die Eigenwerte eines Systems, aufgestellt mit $k = 81$ Ansatzfunktionen der Form

$$R_1(\gamma) = 1, \quad (3.51)$$

$$R_i(\gamma) = \cos\left(\frac{i+2}{2}\gamma\right) \quad \text{für } i = 2, 4, 6, \dots, k-1 \quad (3.52)$$

und

$$R_i(\gamma) = \sin\left(\frac{i+1}{2}\gamma\right) \quad \text{für } i = 3, 5, 7, \dots, k, \quad (3.53)$$

als Funktion der Drehgeschwindigkeit der Walze ermittelt. In dem Lösungsraum von $k = 81$ Ansatzfunktionen sind neben der Eins als konstante Funktion 40 Paare von Sinus- und Kosinusfunktionen enthalten. Diese Paare von harmonischen Funktionen lassen, neben der Näherung einer beliebigen 2π -periodischen Funktion, Wellenmuster mit $p = 1, \dots, 40$ Wellen über dem Umfang zu.

Parameter	Betrag	Einheit
m_w	6500	kg
ω_w	$2\pi \cdot 17$	1/s
k_w	$m_w \omega_w^2$	N/m
ω_p	$2\pi \cdot 200$	1/s
k_p	$m_w \omega_p^2$	N/m
R_0	0.35	m
V	10^{13}	Ns/m

Tabelle 3.1:

Parameter der elastisch gelagerten
Walze mit Oberflächenverschleiß

Aufgrund der Strukturen von \mathbf{Y} und \mathbf{Z} sind die Differentialgleichungen im Gegensatz zu Abschnitt 3.1 nicht mehr entkoppelt. Es soll deshalb zusätzlich ermittelt werden, wie viele Ansatzfunktionen allgemein notwendig sind, um belastbare Aussagen über die Ausprägung eines bestimmten Verschleißmusters treffen zu können. Zu diesem Zweck werden die Eigenwerte von drei unterschiedlichen Minimalsystemen berechnet, die sich ergeben, wenn man mit

$$R_1(\gamma) = \cos(p\gamma) \quad (3.54)$$

und

$$R_2(\gamma) = \sin(p\gamma) \quad (3.55)$$

lediglich ein Paar von Sinus- und Kosinusfunktionen verwendet. Für die drei Minimalsysteme ist jeweils $p = 16$, $p = 19$ bzw. $p = 20$.

Die für die Berechnungen verwendeten Parameter sind in Tabelle 3.1 aufgeführt, sie basieren auf Erfahrungswerten für Papierkalender. Für die Dämpfungskoeffizienten wird angenommen, dass das System mit $d_w = \beta k_w$ und $d_p = \beta k_p$ schwach steifigkeitsproportional gedämpft ist. Die Proportionalitätskonstante β wird so gewählt, dass der modale Dämpfungsgrad des Systems ohne Verschleiß $D = 0.02$ ist. Das System ohne Verschleiß ist ein einfacher Einmassenschwinger. Es ergibt sich

$$\beta = 2D \sqrt{\frac{m_w}{k_w + k_p}} \quad (3.56)$$

und $d_w = \beta k_w$ sowie $d_p = \beta k_p$. Der der Analyse zugrunde gelegte Drehzahlbereich liegt zwischen

$$50 \text{ rad/s} < \Omega < 85 \text{ rad/s} \quad (3.57)$$

und orientiert sich wegen $\Omega = v_p/R_0$ an einem Bereich der Produktionsgeschwindigkeit zwischen ca. $v_{p, \min} = 1050 \text{ m/min}$ und ca. $v_{p, \max} = 1785 \text{ m/min}$. Damit die Eigenwerte in Abhängigkeit der Drehzahl dargestellt werden können, werden die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda) = 0 \quad (3.58)$$

mit

$$\mathbf{A} = -\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Z} \quad (3.59)$$

für jedes der untersuchten Systeme in Abhängigkeit von Ω numerisch ermittelt.

In der oberen Graphik des Bildes 3.5 sind die positiven Imaginärteile der berechneten konjugiert komplexen Eigenwerte dargestellt. In der unteren Graphik von Bild 3.5 sind die Realteile der Eigenwerte gezeigt. Bild 3.6 zeigt einen Ausschnitt um die Null der reellen Achse. Man kann erkennen, dass der Imaginärteil eines Eigenwertpaares über den gesamten Bereich der Drehgeschwindigkeit konstant bleibt. Die restlichen Imaginärteile wachsen über der Drehgeschwindigkeit an und kreuzen den konstanten Imaginärteil. Die Realteile eines konjugiert komplexen Eigenwertpaares liegen deutlich in der negativen Halbebene der reellen Achse. Ferner existieren über den gesamten Drehzahlbereich positive Realteile. Auf der Achse der Drehzahl leicht links versetzt zu den Kreuzungspunkten der Imaginärteile erreichen die Realteile eines konjugiert komplexen Eigenwertpaares ein Maximum und es tritt eine innere Resonanz auf. Diese Realteile bleiben in der Nähe der Resonanzpunkte größer als alle anderen Realteile. Daneben existieren bestimmte Drehgeschwindigkeiten, bei denen die Realteile zweier konjugiert komplexer Eigenwertpaare gleich groß sind. Als Konsequenz wird in Abhängigkeit der Drehzahl in den meisten Fällen eine durch einen

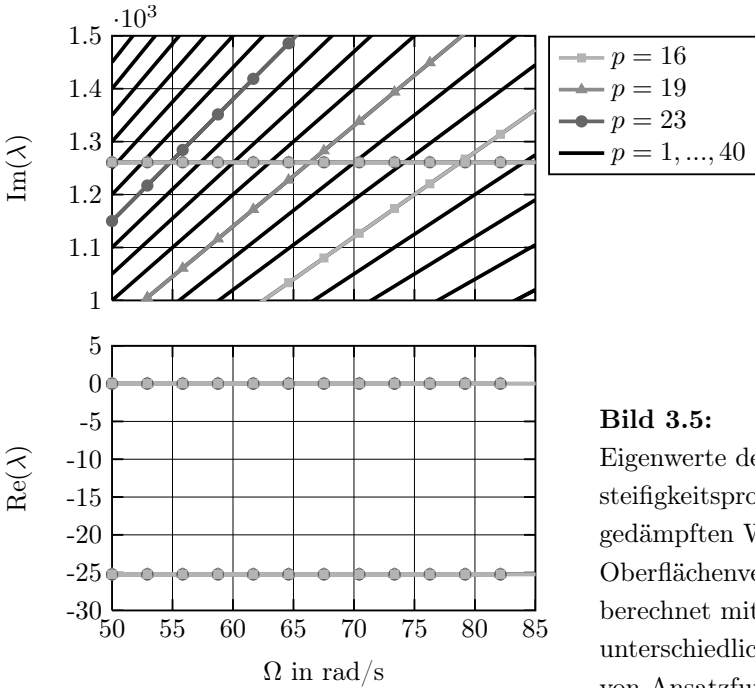


Bild 3.5:
Eigenwerte der schwach steifigkeitsproportional gedämpften Walze mit Oberflächenverschleiß, berechnet mit unterschiedlichen Sätzen von Ansatzfunktionen

Eigenvektor beschriebene Kontur schneller wachsen als alle anderen, wobei die Wachstumsrate in der inneren Resonanz maximal wird. Parallel zu der

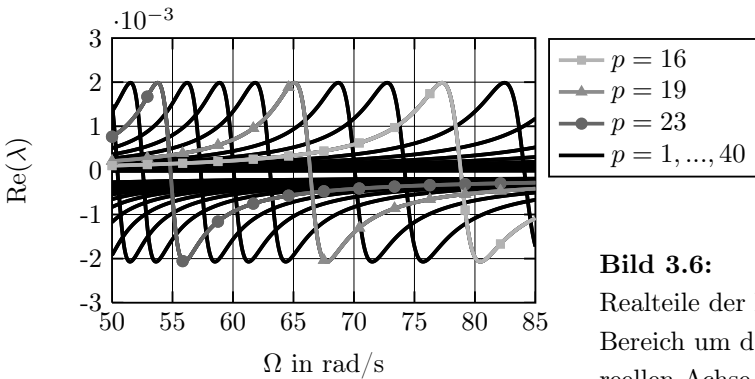


Bild 3.6:
Realteile der Eigenwerte, Bereich um die Null der reellen Achse

sich entwickelnden Kontur der Walzenoberfläche kommt es zu aufklingenden Schwingungen der Walze. Lediglich an den Drehgeschwindigkeiten mit gleich großen Realteilen werden zwei durch je einen Eigenvektor beschriebene Konturen gleich schnell wachsen. Bild 3.6 kann weiterhin entnommen werden, dass die Abstände zwischen den einzelnen Maxima in den positiven Realteilen mit zunehmender Drehgeschwindigkeit größer werden.

Ohne Dämpfung in der Lagerung der Walze und des Stößels treten die Maxima der Realteile an den Drehgeschwindigkeiten auf, an denen sich die Imaginärteile kreuzen. Für diesen Fall sind die Maxima ungleich größer und es existiert kein Realteil, der deutlich in der negativen Halbebene der reellen Achse liegt. Ein Bild mit den Eigenwerten für den ungedämpften Fall ist in Anhang A gezeigt.

Im Vergleich der Eigenwerte der unterschiedlichen Systeme zeigt sich, dass bereits ein minimaler Satz von $k = 2$ Ansatzfunktionen ausreicht, um die Verläufe von zwei Eigenwertpaaren des Systems mit $k = 81$ Ansatzfunktionen abzubilden. Folglich genügt ein minimaler Satz von Ansatzfunktionen mit $p \in \mathbb{N}^+$, um die Drehgeschwindigkeiten zu identifizieren, für die eine innere Resonanz auftritt. Aufgrund der Tatsache, dass alle Maxima in den Realteilen gleich groß sind, können für ein p Aussagen über die maximalen Wachstumsraten im gesamten Drehzahlbereich gemacht werden. Für die Minimalsysteme beschreiben die Einträge eines Eigenvektors, der zu einem Eigenwert gehört, dessen Imaginärteil über Ω anwächst und dessen Realteil ein Maximum zeigt, ein Wellenmuster einer bestimmten Wellenlänge. Dass dies auch für das System mit $k = 81$ Ansatzfunktionen gilt, kann gezeigt werden, indem die an die Anfangsbedingung $\mathbf{x}_0 = [0, 10^{-6}, 0, \dots, 0]^T$ angepasste homogene Lösung

$$\mathbf{x}_h = \boldsymbol{\psi} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_k t} \end{bmatrix} \boldsymbol{\psi}^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (3.60)$$

für einzelne Ω ermittelt wird. Die Form der Walzenoberfläche nach einer Zeit

t ergibt sich dann zu

$$r(\gamma, t) = [R_1(\gamma), \dots, R_k(\gamma)] \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_k(t) \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Bild 3.7 zeigt die sich entwickelnden Oberflächenkonturen für den Fall innerer Resonanz ($\Omega = 65 \text{ rad/s}$), für den Fall gleich großer Realteile ($\Omega = 65.97 \text{ rad/s}$) und für eine Drehgeschwindigkeit kurz nach der Stelle gleich großer Realteile ($\Omega = 66.2 \text{ rad/s}$). Die Zeitpunkte t werden aus Gründen der Anschauung so gewählt, dass die größte Deformation in der Welligkeit der Oberfläche 0.02 m beträgt. Es entwickelt sich für $\Omega = 65 \text{ rad/s}$ ein Muster mit 19 Wellen über dem Umfang. Bei $\Omega = 65.97 \text{ rad/s}$ wachsen Muster mit 19 und 18 Wellen über dem Umfang gleich schnell und überlagern sich. Hier kommt es zu einer Schwebung, d.h. es entwickelt sich eine Welligkeit mit unterschiedlich großer Ausprägung. Bereits bei geringfügig höherer Drehgeschwindigkeit wächst wieder eine Welligkeit, jetzt mit 18 Wellen über dem Umfang, dominant an. Wichtiger als die Formen sind die Wachstumsraten, die in den Zeiten t bis zum Erreichen der maximalen Deformation der Oberfläche von 0.02 m zum Ausdruck kommen.

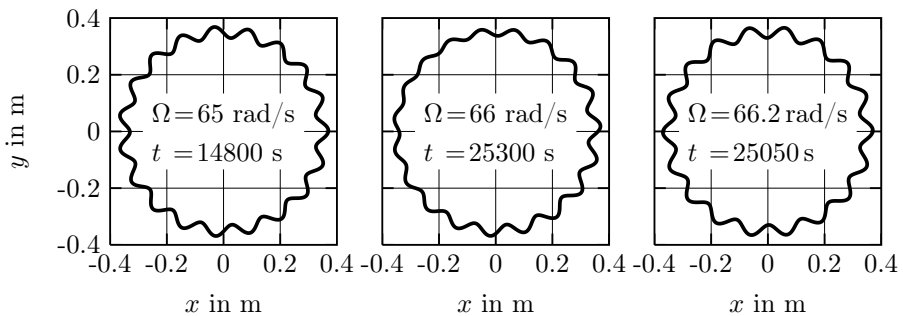


Bild 3.7: Kontur der Walzenoberfläche nach jeweils fester Zeitspanne für verschiedene Drehgeschwindigkeiten

3.2.3 Einfluss einzelner Dämpfungsterme

In Abschnitt 3.2 konnte anhand einer Eigenwertanalyse das Eigenverhalten des in Bild 3.2 gezeigten Modells ermittelt werden. Gegenstand dieses Abschnittes ist es, den Einfluss der einzelnen Dämpfungsterme auf die maximalen Wachstumsraten der Verschleißmuster zu untersuchen. Die Erhöhung der Dämpfungskoeffizienten erfolgt durch

$$d_w = \beta k_w + d^* \quad (3.62)$$

bzw. durch

$$d_p = \beta k_p + d^* . \quad (3.63)$$

Die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2 zeigen, dass die Untersuchungen exemplarisch an einem System durchgeführt werden können, bei dem die Kontur der Walzenoberfläche nur mit einer Sinus- und einer Kosinusfunktion diskretisiert ist. Es werden hier die Ansatzfunktionen

$$R_1(\gamma) = \cos(15\gamma) \quad (3.64)$$

und

$$R_2(\gamma) = \sin(15\gamma) \quad (3.65)$$

verwendet. Die Wahl der Ansatzfunktionen mit 15 Wellen über dem Umfang wird damit begründet, dass es bei einer Erhöhung der Dämpfung zu einer Linksverschiebung der Maxima kommt. Für die gewählten Ansatzfunktionen liegen die Maxima für $d^* = 0$ bei hohen Drehzahlen und damit weit rechts im betrachteten Drehzahlbereich. Damit soll ausgeschlossen werden, dass die Maxima bei einer Erhöhung von d^* nach links aus dem betrachteten Drehzahlbereich hinauslaufen. Der Maximalwert der positiven Realteile des hier betrachteten Minimalsystems wird bei einer separaten Erhöhung von d_w und d_p numerisch ermittelt. Die sich ergebenden Verläufe der Maximalwerte der positiven Realteile sind in Bild 3.8 dargestellt. Damit eine prozentuale Veränderung der Maxima direkt abgelesen werden kann, sind die Verläufe jeweils auf den Wert für $d^* = 0$ normiert. Es ist zu erkennen, dass

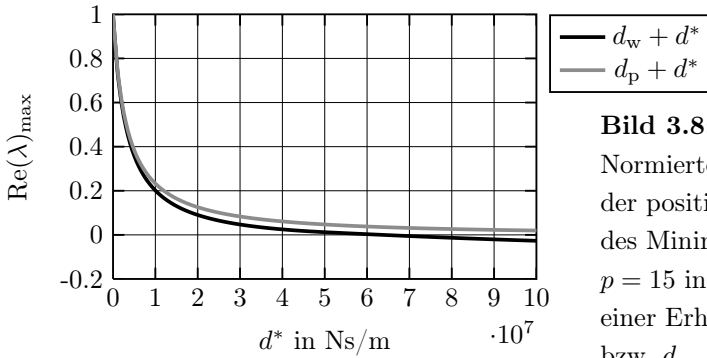


Bild 3.8:

Normierte Maximalwerte der positiven Realteile des Minimalsystems mit $p = 15$ in Abhängigkeit einer Erhöhung von d_w bzw. d_p

eine Erhöhung der Dämpfungskoeffizienten stets einen positiven Effekt hat. Sowohl für den Fall einer Erhöhung der Dämpfung in der Lagerung der Walze als auch für die Erhöhung der Dämpfung in der Lagerung des Stößels nehmen die Maxima der Realteile ab. Bis zu einer Absenkung der Maxima auf ca. 20% des Ausgangswertes sind die Verläufe in beiden Fällen in etwa gleich. Der hierzu notwendige Dämpfungskoeffizient d^* beträgt 10^6 Ns/m . Berechnet man aus Gründen der Anschauung den Dämpfungsgrad für das System ohne Verschleiß ergibt sich

$$D = \frac{1}{2} \frac{d_w + d_p + d^*}{\sqrt{(k_w + k_p)m_w}} = 0.63 \quad (3.66)$$

und das System ohne Verschleiß wäre noch schwingfähig. Im weiteren Verlauf der Kurven zeigt sich, dass es möglich ist, das System über eine Erhöhung von d_w vollständig zu stabilisieren, während dies, zumindest für den dargestellten Bereich von d^* , durch eine Erhöhung von d_p nicht möglich scheint. Allerdings ist der zur Stabilisierung notwendige Dämpfungskoeffizient mit $d^* = 5 \times 10^7$ sehr hoch. Der Dämpfungsgrad des Systems ohne Verschleiß ist dann $D = 3.07$.

3.3 System mit zwei dynamischen Freiheitsgraden und Oberflächenverschleiß

Die in Abschnitt 3.2 vorgestellte Modellierung eines dynamischen Rotorsystems gibt generelle Einblicke in die Wechselwirkungen zwischen Oberflächenverschleiß und Systemdynamik. Die Ergebnisse zum Einfluss der Dämpfungsterme zeigen erste Möglichkeiten, wie die Entwicklung eines Verschleißmusters positiv beeinflusst werden kann. Gegenstand dieses Abschnittes ist es, die Modellierung auf ein System mit zwei dynamischen Freiheitsgraden zu erweitern. Das zu diesem Zweck betrachtete Modell ist in Bild 3.9 dargestellt. Im Unterschied zu dem Modell aus Abschnitt 3.2 ist die rotierende Walze jetzt nicht gegen eine feste Wand gelagert sondern mit einer Feder der Steifigkeit k_w an die Punktmasse m_J gekoppelt. Die Punktmasse wiederum ist auf einer Feder der Steifigkeit k_J gelagert. Die Bewegung der Masse m_J ist durch $q_J(t)$ beschrieben, die Bewegung des Walzenmittelpunktes ist durch $q_w(t)$ gegeben. Für die Modellierung des Oberflächenverschleißes gelten die Annahmen der beiden ersten Abschnitte dieses Kapitels. Jeder Feder des Modells ist ein viskoser Dämpfer parallel

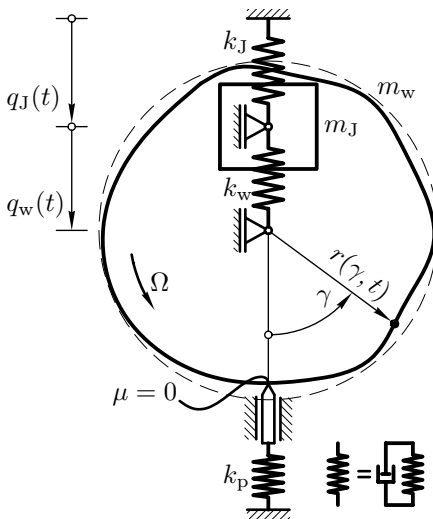


Bild 3.9:

Modell mit zwei dynamischen Freiheitsgraden und Oberflächenverschleiß

geschaltet. Die Koeffizienten sind jeweils d_J , d_w und d_p . Damit die Kontaktkraft nicht negativ wird, ist das System durch eine konstante Kraft F_0 vorgespannt. Die Kraft wirkt auf die Masse m_J .

Anhand des Modells wird die Anwendung der eingeführten Modellierungsmethode für Oberflächenverschleiß für den Fall mehrerer dynamischer Freiheitsgrade demonstriert. Ferner trägt die Modellerweiterung den in Papierkalandern vorhandenen Systemen zur Kompensation der Durchbiegung Rechnung. Damit kann analysiert werden, welchen Effekt hier eine Erhöhung der Dämpfung auf die Ausbildung von Verschleißmustern hat.

3.3.1 Konstitutive und Systemgleichungen

Gemäß dem zweiten NEWTONschen Gesetz ergibt sich für die Bewegung der Masse m_J

$$m_J \ddot{q}_J(t) + d_J \dot{q}_J(t) + k_J q_J(t) + k_w (q_J(t) - q_w(t)) + d_w (\dot{q}_J(t) - \dot{q}_w(t)) = F_0. \quad (3.67)$$

Die Bewegungsgleichung für den Walzenmittelpunkt erweitert sich auf

$$\begin{aligned} m \ddot{q}_w(t) + k_w (q_w(t) - q_J(t)) + d_w (\dot{q}_w(t) - \dot{q}_J(t)) \\ + d_p k_p \left(\dot{q}_w(t) + \frac{\partial r(0, t)}{\partial t} - \Omega \frac{\partial r(0, t)}{\partial \gamma} \right) \\ + k_p (q_w(t) + r(0, t) - R_0) = 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Die Summe der virtuellen Arbeiten für die Walzenoberfläche ändert sich im Vergleich zu (3.41) nicht. Erneut lassen sich (3.67) und (3.68) mit $q_J(t) = q_{J,1}(t)$, $\dot{q}_J(t) = \dot{q}_{J,2}(t)$, $q_w(t) = q_{w,1}(t)$ und $\dot{q}_J(t) = \dot{q}_{J,2}(t)$ als System erster Ordnung schreiben und man erhält mit dem Ansatz zur Diskretisierung der Oberfläche (3.5) eingesetzt in (3.41) ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung der Form (3.7). Der Zustandsvektor ist jetzt

$$\mathbf{x} = [q_{J,1}(t), q_{w,1}(t), q_{J,2}(t), q_{w,2}(t), q_1(t), \dots, q_k(t)]^T. \quad (3.69)$$

Unterteilt man die Systemmatrizen wie in (3.44) bzw. (3.47), dann erweitern sich die Untermatrizen auf

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_w \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{Y}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ d_p R_1(0) & \dots & d_p R_k(0) \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{Y}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

und

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ k_J + k_w & -k_w & d_J + d_w & -d_w \\ -k_w & k_p + k_w & -d_w & d_p + d_w \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{Z}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ k_p R_1(0) - d_p \Omega R'_1(0) & \dots & k_p R_k(0) - d_p \Omega R'_k(0) \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{Z}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & k_p R_1(0) & 0 & d_p R_1(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & k_p R_k(0) & 0 & d_p R_k(0) \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Die Einträge $y_{4,ij}$ und $z_{4,ij}$ ändern sich im Vergleich zu Abschnitt 3.2 nicht. Der Krafteingangsvektor ist jetzt

$$\mathbf{F} = [1, 0, 0, 0, \dots, 0]^T. \quad (3.72)$$

Wie für das System aus Abschnitt 3.2 gibt die homogene Lösung des Differentialgleichungssystems Aufschluss über die Entwicklung von Verschleißmustern.

3.3.2 Analyse der homogenen Lösung

Wie in Abschnitt 3.2 wird das Stabilitäts- bzw. Eigenverhalten anhand einer Eigenwertanalyse untersucht. Es werden wieder $k = 81$ Ansatzfunktionen der Form

$$R_1(\gamma) = 1, \quad (3.73)$$

$$R_i(\gamma) = \cos\left(\frac{i+2}{2}\gamma\right) \quad \text{für } i = 2, 4, 6, \dots, k-1 \quad (3.74)$$

und

$$R_i(\gamma) = \sin\left(\frac{i+1}{2}\gamma\right) \quad \text{für } i = 3, 5, 7, \dots, k, \quad (3.75)$$

zur Approximation der Walzenoberfläche verwendet. Die Eigenwerte dieses Systems werden mit denen zweier Minimalsysteme verglichen. Für die Minimalsysteme werden mit

$$R_1(\gamma) = \cos(p\gamma) \quad (3.76)$$

und

$$R_2(\gamma) = \sin(p\gamma) \quad (3.77)$$

je ein Paar von Sinus- und Kosinusfunktionen zur Approximation der Walzenoberfläche verwendet. Es sind jeweils $p = 13$ und $p = 23$. Die Eigenwerte der Systeme werden durch Lösen des charakteristischen Polynoms

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda) = 0 \quad (3.78)$$

mit

$$\mathbf{A} = -\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Z} \quad (3.79)$$

für den Drehzahlbereich $50 \text{ rad/s} \leq \Omega \leq 85 \text{ rad/s}$ bestimmt.

Die Parameter für die Berechnungen sind in Tabelle 3.2 zusammengefasst. Wie beim Vorgehen bei der elastisch gelagerten Walze mit einem dynamischen Freiheitsgrad, wird mit $\mathbf{D} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$ von einer schwachen Proportionaldämpfung ausgegangen. Hierbei sollen die beiden modalen Dämpfungsgrade des Systems ohne Verschleißmodellierung $D_1 = D_2 = 0.02$ betragen. Das System ohne Verschleißmodellierung ist in diesem Fall ein einfacher Zweimassenschwinger mit der Massen- bzw. Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_J & 0 \\ 0 & m_w \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_J + k_w & -k_w \\ -k_w & k_w + k_p \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Die für die proportionale Dämpfung notwendigen Konstanten können ermittelt werden, indem man zunächst das Eigenwertproblem

$$(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{K})\mathbf{u} = 0 \quad (3.81)$$

Parameter	Value	Units
m_J	5000	kg
m_w	6500	kg
k_J	$m_J(2\pi 17)^2$	N/m
k_w	$m_w(2\pi 150)^2$	N/m
k_p	$m_w(2\pi 200)^2$	N/m
R_0	0.35	m
V	10^{13}	Ns/m

Tabelle 3.2:

Parameter des Systems mit zwei dynamischen Freiheitsgraden und Oberflächenverschleiß

löst. Mit den in der Matrix ψ zusammengefassten, rein reellen Eigenvektoren \mathbf{u}_1 und \mathbf{u}_1 folgt

$$\psi^\top \mathbf{M} \psi = \begin{bmatrix} m_{1,\text{gen}} & 0 \\ 0 & m_{2,\text{gen}} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \psi^\top \mathbf{K} \psi = \begin{bmatrix} k_{1,\text{gen}} & 0 \\ 0 & k_{2,\text{gen}} \end{bmatrix}. \quad (3.82)$$

Wegen

$$D_i = \frac{1}{2} \frac{\alpha m_{i,\text{gen}} + \beta k_{i,\text{gen}}}{\sqrt{m_{i,\text{gen}} k_{i,\text{gen}}}} \quad (3.83)$$

ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_{1,\text{gen}}}{k_{1,\text{gen}}}} & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_{1,\text{gen}}}{m_{1,\text{gen}}}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_{2,\text{gen}}}{k_{2,\text{gen}}}} & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_{2,\text{gen}}}{m_{2,\text{gen}}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.02 \end{bmatrix}, \quad (3.84)$$

dessen Lösung α und β liefert.

Bild 3.10 zeigt die berechneten Eigenwerte. In der oberen Graphik sind die Imaginärteile und in der unteren Graphik die Realteile dargestellt. Bild 3.11 zeigt einen Ausschnitt um die Null der reellen Achse. Im Unterschied zu dem Modell der elastisch gelagerten Walze existieren jetzt zwei konjugiert komplexe Eigenwertpaare, deren Imaginär- und Realteile über den ganzen Drehzahlbereich konstant bleiben. Die Realteile dieser Eigenwerte liegen deutlich in der negativen Halbebene der reellen Achse. Die Imaginärteile der restlichen Eigenwertpaare kreuzen entweder den unteren oder den oberen konstanten Imaginärteil. Neben der Tatsache, dass über den gesamten Drehzahlbereich Eigenwerte mit positivem Realteil existieren, erreichen die Realteile der Eigenwertpaare mit wachsendem Imaginärteil leicht links versetzt zu den unteren als auch leicht links versetzt zu den oberen Kreuzungspunkten ein Maximum. Es existieren demnach Stellen der inneren Resonanz bei hohen sowie Stellen der inneren

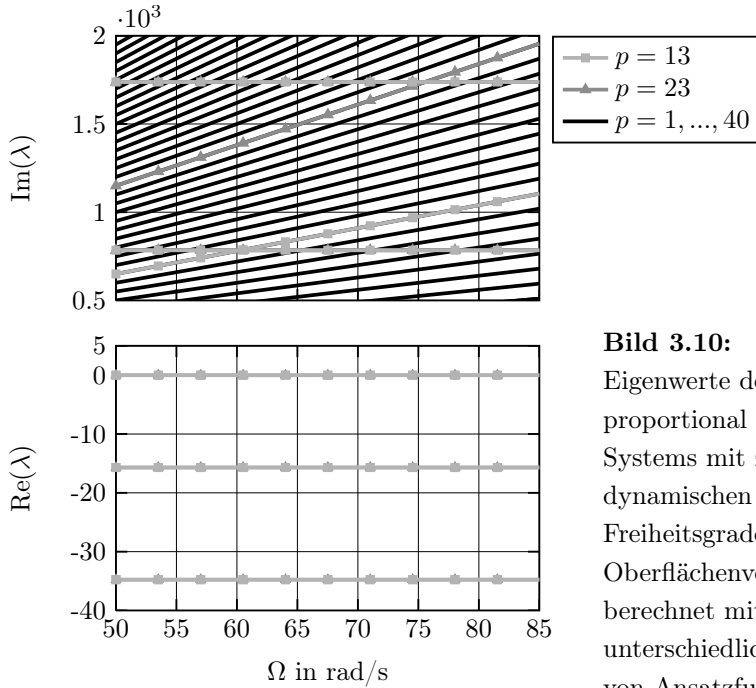


Bild 3.10:

Eigenwerte des schwach proportional gedämpften Systems mit zwei dynamischen Freiheitsgraden und Oberflächenverschleiß, berechnet mit unterschiedlichen Sätzen von Ansatzfunktionen

Resonanz bei niedrigen Frequenzen. Die zu den oberen Kreuzungspunkten der Imaginärteile gehörenden Maximalwerte betragen nur ca. 60 % der

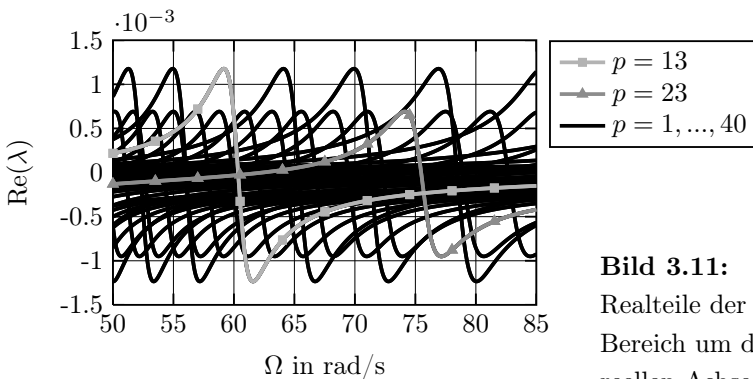


Bild 3.11:

Realteile der Eigenwerte, Bereich um die Null der reellen Achse

zu den unteren Kreuzungspunkten gehörenden Maximalwerte. Folglich werden im betrachteten Fall bei den meisten Drehzahlen Wellenmuster anwachsen, die einer inneren Resonanz mit der niedrigen Frequenz zugeordnet werden können. Im Vergleich zu dem System mit nur einem dynamischen Freiheitsgrad kann jetzt der Fall auftreten, dass bis zu vier Verschleißmuster mit unterschiedlichen Wellenlängen gleich schnell anwachsen.

Ein Bild mit den Eigenwerten für den ungedämpften Fall ist in Anhang B gezeigt. Für $d_J = d_w = d_p = 0$ treten die Maxima der Realteile an den Drehgeschwindigkeiten auf, an denen sich die Imaginärteile kreuzen. Für diesen Fall sind die Maxima ungleich größer und es existiert kein Realteil, der deutlich in der negativen Halbebene der reellen Achse liegt. Zudem sind für diesen Fall die zu den oberen Kreuzungspunkten der Imaginärteile gehörenden Maxima größer als die zu den unteren Kreuzungspunkten gehörenden.

Der Vergleich der Eigenwerte des Systems, bei dem $k = 81$ Ansatzfunktionen verwendet werden, mit den Eigenwerten der beiden Minimalsysteme zeigt, dass auch im Fall von zwei dynamischen Freiheitsgraden eine begrenzte Anzahl von Ansatzfunktionen ausreicht, um die Stellen innerer Resonanz zu identifizieren. Allerdings ist es für Parameterstudien sinnvoll, entweder zwei Minimalsysteme parallel zu analysieren oder aber $k = 4$ Ansatzfunktionen für die Diskretisierung der Walzenoberfläche zu verwenden. Hierbei müssen die Wellenlängen der Ansatzfunktionen so gewählt werden, dass im betrachteten Drehzahlbereich eine innere Resonanz mit der niedrigen und eine innere Resonanz mit der höheren Frequenz abgebildet sind.

3.3.3 Einfluss einzelner Dämpfungsterme

Wie für die elastisch gelagerte Walze kann auch für das System mit zwei dynamischen Freiheitsgraden ermittelt werden, welchen Einfluss eine Erhöhung einzelner Dämpfungsterme auf die maximalen Wachstumsraten der Verschleißmuster hat. Die Dämpfungskoeffizienten werden jeweils in der Form

$$d_J = \alpha m_J + \beta k_J + d^*, \quad (3.85)$$

$$d_w = \beta k_w + d^* \quad (3.86)$$

und

$$d_p = \alpha m_w + \beta k_p + d^* \quad (3.87)$$

erhöht. Es werden die Maxima der positiven Realteile eines Minimalsystems mit $k = 4$ Ansatzfunktionen zur Oberflächendiskretisierung numerisch als Funktion von d^* bestimmt. Damit die Maxima im Ausgangszustand bei möglichst hohen Drehzahlen liegen und sowohl eine innere Resonanz bei einer hohen Frequenz als auch eine innere Resonanz bei einer niedrigeren Frequenz abgebildet ist, werden die Ansatzfunktionen

$$\begin{aligned} R_1(\gamma) &= \cos(10\gamma) \\ R_2(\gamma) &= \sin(10\gamma) \\ R_3(\gamma) &= \cos(21\gamma) \end{aligned} \quad (3.88)$$

und

$$R_4(\gamma) = \sin(21\gamma) \quad (3.89)$$

verwendet.

Bild 3.12 zeigt die berechneten Verläufe der Maxima. Aus Gründen der Ablesbarkeit sind die Werte jeweils auf den größeren der beiden Maxima für $d^* = 0$ normiert. Mit max. O werden die Maxima bezeichnet, die eine innere Resonanz mit einer hohen Frequenz charakterisieren. Die Maxima, die eine innere Resonanz bei niedriger Frequenz charakterisieren werden mit max. U bezeichnet. Der obersten Graphik von Bild 3.12 ist zu entnehmen, dass bei einer Erhöhung von d_J beide Maxima zunächst abnehmen. Hierbei ist die Reduktion von max. U wesentlich größer und es gelingt sogar die Stellen der inneren Resonanz bei der niedrigen Frequenz zu eliminieren. Allerdings kommt es parallel zu einem erneuten Anwachsen von max. O. Die mittlere Graphik von Bild 3.12 zeigt, dass es bei einer Erhöhung von d_w anfänglich ebenfalls zu einem Absinken beider Maximalwerte kommt. Jetzt ist die Abnahme für max. O wesentlich größer und die Stellen einer inneren Resonanz bei der niedrigen Frequenz können eliminiert werden. Für max. U

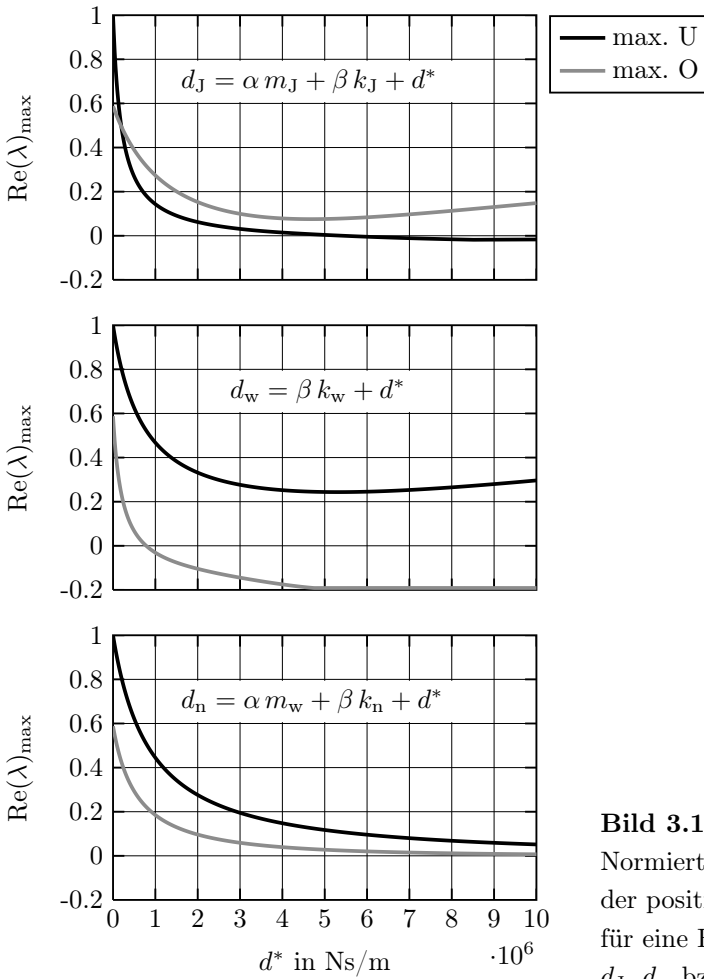


Bild 3.12:

Normierte Maximalwerte der positiven Realteile für eine Erhöhung von d_J , d_w bzw. d_p

indes ist es nicht möglich, eine Absenkung unter 10 % des Ausgangswertes zu erreichen. Gleichfalls wachsen diese Maxima erneut an, wenn d_w weiter gesteigert wird. Die unterste Graphik von Bild 3.12 zeigt den Verlauf der Maxima bei einer ausschließlichen Erhöhung von d_p . Die Erhöhung der Dämpfung in der Lagerung des Stößels hat für den gesamten untersuchten Bereich von d^* einen positiven Effekt, da die Verläufe für beide Maxima stets

kleiner werden. Der Effekt ist insbesondere für kleine d^* nicht so groß wie für eine Erhöhung von d_w bzw. d_J .

3.4 Diskussion der Ergebnisse

Die in diesem Kapitel eingeführte Modellierungsmethode zeigt, wie es möglich ist, zu einer geschlossenen Beschreibung für dynamische Rotorsysteme mit Oberflächenverschleiß durch lineare Differentialgleichungen zu gelangen. Die Methode beruht auf dem Ansatz, eine Verschleißschicht als gedämpftes Kontinuum zu modellieren, das sich aufgrund von Kräften bleibend verformt. Die Deformation des Kontinuums wird durch eine partielle Differentialgleichung beschrieben. Diese kann mit dem Verfahren nach RITZ diskretisiert werden. Damit unterscheidet sich der hier vorgestellte Modellierungsansatz von den in der Literatur existierenden Herangehensweisen, bei denen entweder, wie z.B. bei SUEOKA et al. in [38], mit Totzeiten gearbeitet oder aber, wie bei R. GRUNAU in [12], E. GRUNAU in [11], HADER in [16] und BROMMUNDT [3] davon ausgegangen wird, dass die langsamen Verschleißprozesse getrennt von den schnellen systemdynamischen Prozessen auf unterschiedlichen Zeitskalen behandelt werden können.

Anhand der Berechnungen mit dem Modell einer festgelagerten, rotierenden Walze lässt sich geschlossen analytisch zeigen, dass es bei Verschleißprozessen aufgrund äußerer Wechsellasten bei einem ganzzahligen Vielfachen des Verhältnisses der Frequenz der äußeren Kraft zur Drehfrequenz der Walze zum Ausprägen einer Welligkeit kommen kann. Die Welligkeit wird hierbei kontinuierlich anwachsen und die Anzahl der Wellen über dem Umfang ist durch das ganzzahlige Vielfache gegeben. In der Nähe eines ganzzahligen vielfachen des Verhältnisses kommt es zu einer Schwebung in der Lösung der konstitutiven Gleichungen. Die Welligkeit wird sich hier also zunächst aufbauen und dann wieder abnehmen. Je näher die Frequenz der Kraft an der Drehfrequenz liegt desto länger wird die Phase andauern, in der die Welligkeit wächst. Es ist vorstellbar, dass es in der Praxis aufgrund dieses Zusammenhangs bereits zu einem Barringtonproblem kommen kann, obwohl die Frequenz der äusseren Wechsellasten und die Drehfrequenz der Walze

in einem nicht exakt ganzzahligen Vielfachen zueinander stehen.

Für die Modelle der dynamischen Systeme mit Oberflächenverschleiß muss bei konstanter Vorspannung nur die homogene Lösung der konstitutiven Gleichungen analysiert werden, um Aussagen über die Ausprägung von Welligkeiten treffen zu können. Hierbei genügt es, die Eigenwerte zu berechnen. Bei realistischer Dämpfung existieren stets mehrere Eigenwerte mit positivem Realteil. Der zu dem Eigenwert mit dem größten positiven Realteil gehörende Eigenvektor beschreibt das Verschleißmuster, das am schnellsten anwachsen wird. In Abhängigkeit der gewählten Ansatzfunktionen sind die instabilen Eigenvektoren jeweils durch ein harmonisches Wellenmuster mit einer bestimmten Wellenlänge charakterisiert. Für das System mit einem dynamischen Freiheitsgrad existiert für jeden Eigenwert mit positivem Realteil und den dazugehörigen Eigenvektor eine Drehgeschwindigkeit der Walze, für die eine innere Resonanz erreicht wird und damit die Wachstumsrate maximal wird. Im Vergleich dazu existieren für das System mit zwei dynamischen Freiheitsgraden zwei Drehgeschwindigkeiten, an denen ein Realteil lokal ein Maximum erreicht. Hierbei sind beide Maxima nicht zwangsläufig gleich groß und die Stellen der inneren Resonanz, bei denen sich die größeren Maxima ergeben, sind als kritisch zu erachten. Die hier anwachsenden Verschleißmuster werden für die meisten Drehgeschwindigkeiten dominant anwachsen.

Ein großer Vorteil der eingeführten Modellierung besteht darin, dass es genügt, einen minimalen Satz von wenigen Ansatzfunktionen zu verwenden, um Parameterstudien durchzuführen. Es kann so mit wenig Berechnungsaufwand der Einfluss verschiedener Systemparameter auf die Wachstumsraten der Verschleißmuster überprüft werden. Hierzu genügt es, eine Sinus- und eine Kosinusfunktion mit einer Anzahl Wellen über dem Umfang p als Ansatzfunktionen zu verwenden. Die untersuchten Einflüsse einzelner Dämpfungsterme auf die maximalen Wachstumsraten ergeben, dass es für das System mit elastisch gelagerter Walze und Oberflächenverschleiß immer sinnvoll ist, die Dämpfung zu erhöhen. Die Wachstumsraten werden in jedem Fall verringert. Für das System mit zwei dynamischen Freiheitsgraden ist dies nur für kleine Dämpfungskoeffizienten

gewährleistet. Die Erhöhung der Dämpfung an nur einer Stelle im System wirkt sich auf die verschiedenen lokalen Maxima der Realteile unterschiedlich aus. Ansteigende Dämpfungskoeffizienten können wieder zu einem Anwachsen von Realteilen führen. Zudem gibt es bei dem System mit zwei dynamischen Freiheitsgraden bei kleinen Dämpfungskoeffizienten eine ideale Stelle, an der die Erhöhung einer Dämpfung den größten Nutzen hat. Für die betrachteten Systemparameter liegt diese Stelle nicht in den Systemen zur Kompensation der Durchbiegung. Allerdings ist es vorstellbar, dass die Systemparameter so eingestellt werden, dass dies der Fall ist.

4 Zusammenhänge zwischen kopplungs- und verschleiß- bedingten Phänomenen

Mit den in Kapitel 2 und Kapitel 3 dieser Arbeit vorgestellten Modellen wurde getrennt untersucht, wie das Schwingungsverhalten eines Papierkalenders durch die Gegebenheiten im Kontaktbereich beeinflusst wird und wie die Systemdynamik mit der Ausprägung von Verschleißmustern verknüpft ist. Gegenstand dieses Kapitels ist es, die beiden Modellierungsansätze der Kapitel 2 und 3 zu vereinen. Es wird ein Modell aufgestellt, das qualitative Einblicke gibt, wie sich die Gegebenheiten im Kontaktbereich auf die Entwicklung von Verschleißmustern auswirken.

4.1 Modell einer Walze mit Oberflächen- verschleiß im Kontakt mit der Stoffbahn

Das diesem Kapitel zugrunde gelegte Modell ist in Bild 4.1 dargestellt. Es besteht aus einer Walze, die mit der Geschwindigkeit Ω rotiert. Die Walze steht in Kontakt mit der Stoffbahn und die Oberfläche der Walze ändert, bedingt durch die Kontaktkräfte, ihre Kontur. Der Walzenmittelpunkt ist durch zwei Federelemente der Steifigkeit k_w elastisch gelagert. Die Lagerung der Walze ist so gestaltet, dass durch Einführen eines Winkels α die Federlemente nicht exakt senkrecht aufeinander stehen. Es wird keine Dämpfung in der Lagerung der Walze berücksichtigt. Die Position des Walzenmittelpunktes ist durch $q_x(t)$ und $q_y(t) + q_0$ gegeben. Die Stoffbahn

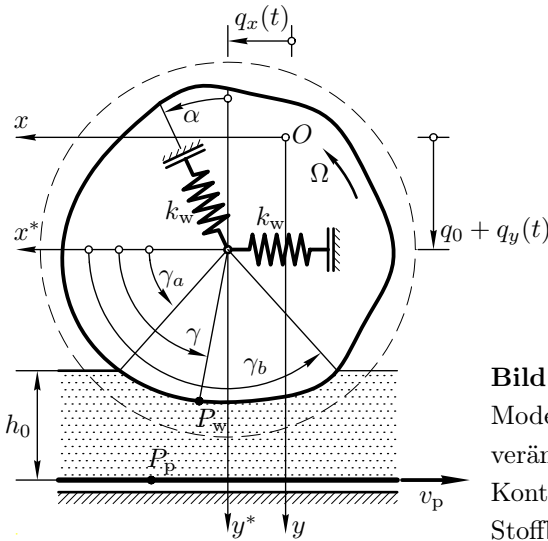


Bild 4.1:
Modell einer Walze mit
veränderlicher Oberfläche im
Kontakt mit ungedämpfter
Stoffbahn

läuft undeformiert in den Kontaktbereich ein, so dass die Unterseite im Abstand $R_0 + h_0$ immer parallel zur x -Achse ist. Der Winkel γ_a beschreibt den Einlauf der Stoffbahn in den Kontaktbereich und der Winkel γ_b den Auslauf aus dem Kontaktbereich. Das Modell der Stoffbahn entspricht dem des Abschnitts 2.1.2 aus Kapitel 2. Die Stoffbahn wird mit punktwisen Eigenschaften in x - und y -Richtung modelliert. Die Eigenschaften in Dickenrichtung sind mit der Steifigkeit $k_{p,y}$ linear elastisch und die Steifigkeit in Bahnrichtung, $k_{p,x}$ ist durch den Faktor a linear an die Kompression der Stoffbahn gekoppelt. Eine Prinzipskizze der punktwisen Eigenschaften der Stoffbahn findet sich in Bild 4.2.

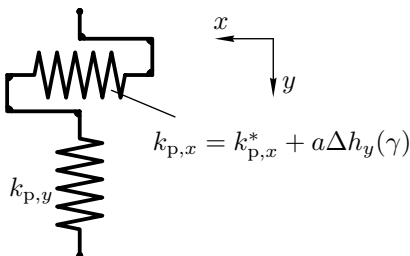


Bild 4.2:
Punktwise Eigenschaften des
Modells der Stoffbahn

4.1.1 Systemgleichungen und Linearisierung

Die Oberfläche der Walze ist im nichtrotierenden Koordinatensystem O^* durch $\tilde{r}(\gamma, t)$ gegeben und wird durch

$$\tilde{r}(\gamma, t) = R_0 + \sum_{i=1}^k R_i(\gamma) q_i(t) \quad (4.1)$$

approximiert. Eine Ableitung von $\tilde{r}(\gamma, t)$ nach der Zeit muss wieder in den materiellen Koordinaten $\gamma = \phi + \Omega t$ durchgeführt werden.

Die Kontaktkinematik hängt für das in diesem Abschnitt betrachtete Modell von der Kontur der Walze ab. Der Vektor vom Ursprung des raumfesten Koordinatensystems O zu einem beliebigen Punkt auf der Walzenoberfläche ist

$$\overrightarrow{OP_w} = (\tilde{r}(\gamma, t) \cos \gamma + q_x(t)) \vec{e}_x + (\tilde{r}(\gamma, t) \sin \gamma + q_y(t)) \vec{e}_y. \quad (4.2)$$

Der Vektor von O zu einem Punkt auf der Unterseite der Walze ergibt sich zu

$$\overrightarrow{OP_p} = (K - v_p \tau) \vec{e}_x + (R_0 + h_0) \vec{e}_y. \quad (4.3)$$

Die Konstante K ist

$$K = \tilde{r}(\gamma, t) \cos \gamma_a + q_x(t). \quad (4.4)$$

Wie in Kapitel 2 gilt, dass die Zeit τ , die ein Element der Papierbahn für den Durchgang durch den Kontaktbereich benötigt, klein gegenüber der Schwingungsperiode des Systems ist. Damit kann τ mit

$$\tau = \frac{\gamma - \gamma_a}{\Omega} \quad (4.5)$$

über den Winkel γ parametrisiert werden. Berechnet man jetzt die Deformation der Stoffbahnelemente, die sich im Kontaktbereich befinden, ergibt sich, dass diese mit

$$\Delta h_x(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) = \left(\overrightarrow{OP_w} - \overrightarrow{OP_p} \right) \cdot \vec{e}_x \quad (4.6)$$

und

$$\Delta h_y(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) = (\overrightarrow{OP_w} - \overrightarrow{OP_p}) \cdot \vec{e}_y + h_0 \quad (4.7)$$

Funktionen des Winkels γ , der Verschiebung des Walzenmittelpunktes in y -Richtung und der Zustände q_1 bis q_k , die die Form der Walzenoberfläche charakterisieren, sind. Dieser Zusammenhang gilt in gleichem Maße für die verteilten Kräfte auf die Walzenoberfläche, die sich aus

$$\begin{aligned} f_x(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) &= (k_{p,x}^* + a \Delta h_y(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k)) \Delta h_x(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k), \\ f_y(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) &= k_{p,y} \Delta h_y(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k). \end{aligned} \quad (4.8)$$

ergeben. Mit den Einheitsvektoren aus Bild 4.3

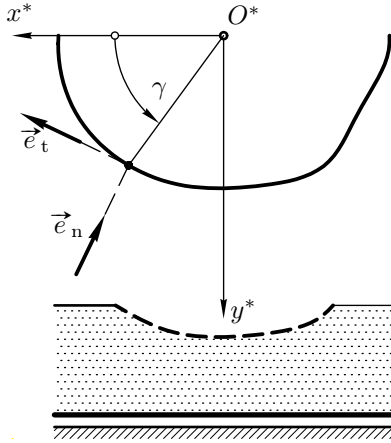
$$\begin{aligned} \vec{e}_t &= -\frac{1}{\tilde{r}(\gamma, t)} \frac{\partial}{\partial \gamma} (\tilde{r}(\gamma, t) \cos(\gamma)) \vec{e}_{x^*} - \frac{1}{\tilde{r}(\gamma, t)} \frac{\partial}{\partial \gamma} (\tilde{r}(\gamma, t) \sin(\gamma)) \vec{e}_{y^*}, \\ \vec{e}_n &= -\frac{1}{\tilde{r}(\gamma, t)} \frac{\partial}{\partial \gamma} (\tilde{r}(\gamma, t) \sin(\gamma)) \vec{e}_{x^*} + \frac{1}{\tilde{r}(\gamma, t)} \frac{\partial}{\partial \gamma} (\tilde{r}(\gamma, t) \cos(\gamma)) \vec{e}_{y^*} \end{aligned} \quad (4.9)$$

können die verteilten Kräfte in x - und y -Richtung in die verteilten Kräfte tangential und normal zur Walzenoberfläche umgerechnet werden. Die Tangential- und Normalkräfte folgen mit

$$\vec{f}(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) = f_x(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) \vec{e}_x + f_y(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) \vec{e}_y \quad (4.10)$$

aus

$$\begin{aligned} f_t(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) &= \vec{f}(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) \cdot \vec{e}_t, \\ f_n(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) &= \vec{f}(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) \cdot \vec{e}_n. \end{aligned} \quad (4.11)$$


Bild 4.3:

Berechnung der verteilten Tangential- und Normalkräfte auf der deformierten Walzenoberfläche

Der Winkel für den Einlauf der Stoffbahn in den Kontaktbereich ergibt sich aus der geometrischen Bedingung $\Delta h_x(\gamma_a, q_y, q_1, \dots, q_k) = 0$. Für den Winkel am Auslauf des Kontaktgebietes muss $f_n(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) = 0$ gelten. Daher sind die Kontaktbereichsgrenzen ebenfalls Funktionen von q_y und q_1 bis q_k . Für das in Bild 4.1 gezeigte Modell folgt mit

$$\hat{f}_x(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) = f_x(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) \frac{\partial \overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_x}{\partial \gamma} \quad (4.12)$$

unter Berücksichtigung des zweiten NEWTONschen Gesetzes für die Walzenbewegung in x -Richtung

$$\begin{aligned} m_w \ddot{q}_x + k_w (q_x (\sin^2 \alpha + 1) + (q_y + q_0) \sin \alpha \cos \alpha) \\ + \int_{\gamma_a(q_y, q_1, \dots, q_k)}^{\gamma_b(q_y, q_1, \dots, q_k)} \hat{f}_x(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) d\gamma = F_{x,0} . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ferner folgt mit

$$\hat{f}_y(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) = f_y(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) \frac{\partial \vec{OP} \cdot \vec{e}_x}{\partial \gamma} \quad (4.14)$$

für die Bewegung der Walze in y -Richtung

$$\begin{aligned} m_w \ddot{q}_y + k_w (q_x \sin \alpha \cos \alpha + (q_y + q_0) \cos^2 \alpha) \\ + \int_{\gamma_a(q_y, q_1, \dots, q_k)}^{\gamma_b(q_y, q_1, \dots, q_k)} \hat{f}_y(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) d\gamma = F_{y,0} . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Für die Modellierung des Oberflächenverschleißes der Walze wird die phänomenologische Herangehensweise aus Abschnitt 3.1 des Kapitels 3 beibehalten. Damit wird die Oberfläche als gedämpftes Kontinuum ohne Rückstellung modelliert, das sich aufgrund von Kräften bleibend verformt. Für den hier betrachteten Fall verteilter Kontaktkräfte wird angenommen, dass die Geschwindigkeit der Formänderung proportional zu den normal auf die Oberfläche wirkenden Kräften ist. Damit ergibt sich mit

$$\hat{f}_n(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) = f_n(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) \frac{\partial \vec{OP} \cdot \vec{e}_x}{\partial \gamma} \quad (4.16)$$

durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten auf die Walzenoberfläche

$$\begin{aligned} V \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \tilde{r}(\gamma, t)}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \tilde{r}(\gamma, t)}{\partial \gamma} \right) \delta \tilde{r}(\gamma, t) d\gamma \\ + \int_{\gamma_a(q_y, q_1, \dots, q_k)}^{\gamma_b(q_y, q_1, \dots, q_k)} \hat{f}_n(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) \delta \tilde{r}(\gamma, t) d\gamma = 0 . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die in den Bewegungsgleichungen der Walze auftretenden Integralterme und der Integralterm in (4.17) sind in q_y und q_1 bis q_k nichtlinear.

Wie in Kapitel 2 dieser Arbeit soll die Stabilität des stationären Zustandes untersucht werden. Der stationäre Zustand für das hier betrachtete Modell ist durch eine Abnahme des Walzenradius charakterisiert. In der Annahme, dass die zeitliche Abnahme des Walzenradius klein ist, werden die Integralterme in den Bewegungsgleichungen der Walze und dem Prinzip der virtuellen Arbeit für den Walzenmantel um den Punkt $q_y = 0$ und $q_1 = 0$ bis $q_k = 0$ in einer TAYLOR-Reihe entwickelt. Dieser Punkt entspricht einem Zustand, bei dem die undeformierte Walze um ein konstantes q_0 in das Modell der Stoffbahn eingedrückt ist. Mit den Integraltermen als allgemeine Funktion

$$\theta(q_y, q_1, \dots, q_k) = \int_{\gamma_a(q_y, q_1, \dots, q_k)}^{\gamma_b(q_y, q_1, \dots, q_k)} f(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k) d\gamma \quad (4.18)$$

gilt jetzt

$$\begin{aligned} \theta(q_y, q_1, \dots, q_k) &= \theta(0, 0, \dots, 0) + q_y \frac{\partial \theta(q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_y} \Big|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0} \\ &\quad + q_1 \frac{\partial \theta(q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_1} \Big|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + q_k \frac{\partial \theta(q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_k} \Big|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0} \\ &\quad + \mathcal{O}(q_y, q_1, \dots, q_k) . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Mit der LEIBNITZ-Regel erhält man für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \theta(q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_y} \Big|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0} = \\
 & \int_{\gamma_a(0,0,\dots,0)}^{\gamma_b(0,0,\dots,0)} \left[\frac{\partial f(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_y} \Big|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0} \right] d\gamma \\
 & + \frac{\partial \gamma_b(q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_y} \Big|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0} f(\gamma_b(0, 0, \dots, 0), 0, 0, \dots, 0) \\
 & - \frac{\partial \gamma_a(q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_y} \Big|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0} f(\gamma_a(0, 0, \dots, 0), 0, 0, \dots, 0)
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \theta(q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_i} \Big|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0} = \\
 & \int_{\gamma_a(0,0,\dots,0)}^{\gamma_b(0,0,\dots,0)} \left[\frac{\partial f(\gamma, q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_i} \Big|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0} \right] d\gamma \\
 & + \frac{\partial \gamma_b(q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_i} \Big|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0} f(\gamma_b(0, 0, \dots, 0), 0, 0, \dots, 0) \\
 & - \frac{\partial \gamma_a(q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_i} \Big|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0} f(\gamma_a(0, 0, \dots, 0), 0, 0, \dots, 0)
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

mit $i = 1, \dots, k$. Da die Integralterme um den Zustand linearisiert werden, bei dem die undeformierte Walze um ein konstantes q_0 in das Modell der Stoffbahn eingedrückt ist, kann aus Abschnitt 2.1.2 des Kapitels 2 für den Winkel

$$\gamma_a(0, 0, \dots, 0) = \arcsin\left(\frac{R_0 - q_0}{R_0}\right) \quad (4.22)$$

übernommen werden. Die Geschwindigkeit der Walze ist mit Ω_0 so eingestellt, dass für die undeformierte Walze die resultierende Kraft in x -Richtung verschwindet. Damit entspricht die Winkelgeschwindigkeit Gleichung (2.18) und ergibt sich, ebenfalls wie in Abschnitt 2.1.2,

$$\gamma_b(0, 0, \dots, 0) = \pi - \gamma_a(0, 0, \dots, 0) . \quad (4.23)$$

Die partiellen Ableitungen des Winkels $\gamma_a(q_y, q_1, \dots, q_k)$ und des Winkels $\gamma_b(q_y, q_1, \dots, q_k)$ folgen aus dem Satz über implizite Funktionen zu

$$\begin{aligned} - \frac{\frac{\partial \Delta h(\gamma_a(q_y, q_1, \dots, q_k), q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_y}}{\frac{\partial \Delta h(\gamma_a(q_y, q_1, \dots, q_k), q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial \gamma_a(q_y, q_1, \dots, q_k)}} \bigg|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0} &= \\ \frac{\partial \gamma_a(q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_y} \bigg|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0} &, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} - \frac{\frac{\partial \Delta h(\gamma_a(q_y, q_1, \dots, q_k), q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_i}}{\frac{\partial \Delta h(\gamma_a(q_y, q_1, \dots, q_k), q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial \gamma_a(q_y, q_1, \dots, q_k)}} \bigg|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0} &= \\ \frac{\partial \gamma_a(q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_i} \bigg|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0} &, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\frac{\partial \hat{f}_n(\gamma_b(q_y, q_1, \dots, q_k), q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_y}}{\frac{\partial \hat{f}_n(\gamma_b(q_y, q_1, \dots, q_k), q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial \gamma_b(q_y, q_1, \dots, q_k)}} \bigg|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0} = \\
 & \frac{\partial \gamma_b(q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_y} \bigg|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0},
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\frac{\partial \hat{f}_n(\gamma_b(q_y, q_1, \dots, q_k), q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_i}}{\frac{\partial \hat{f}_n(\gamma_b(q_y, q_1, \dots, q_k), q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial \gamma_a(q_y, q_1, \dots, q_k)}} \bigg|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0} = \\
 & \frac{\partial \gamma_b(q_y, q_1, \dots, q_k)}{\partial q_i} \bigg|_{q_y=0, q_1=0, \dots, q_k=0}.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Führt man die angegebenen Rechenschritte zur Linearisierung der Integralterme durch, ergeben sich für die Bewegungsgleichungen der Walze in x - und y -Richtung lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Mit $q_x = q_{x,1}$, $\dot{q}_x = q_{x,2}$, $q_y = q_{y,1}$, $\dot{q}_y = q_{y,2}$ können diese in vier Differentialgleichungen erster Ordnung umgeschrieben werden. Mit dem linearisierten Integralterm in (4.17) ergibt sich bei beliebig wählbaren Funktionen δq_y und δq_1 bis δq_k ebenfalls ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Für das gesamte Modell ergibt sich in Matrixnotation

$$\mathbf{Y}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{Z}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{4.28}$$

mit

$$\mathbf{x} = [q_{x,1}, q_{y,1}, q_{x,2}, q_{y,2}, q_1, \dots, q_k]^T. \tag{4.29}$$

4.1.2 Analyse des Eigenverhaltens

Nachdem in Abschnitt 4.1 die konstitutiven und Systemgleichungen des Modells aus Bild 4.1 linearisiert wurden, soll jetzt die homogene Lösung von (4.28) untersucht werden. Zu diesem Zweck wird das Eigenwertproblem

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{4.30}$$

Parameter	Betrag	Einheit
V	10^{13}	Ns/m
m_w	6500	kg
k_w^*	$m_w(2\pi 17)^2$	N/m
$k_{p,x}^*$	2×10^{12}	N/m ²
$k_{p,y}$	4×10^{12}	N/m ²
R_0	0.35	m
h_0	0.1×10^{-3}	m
q_0	0.05×10^{-3}	m
α	0.017	rad

Tabelle 4.1:

Parameter für das Modell einer Walze mit veränderlicher Oberfläche im Kontakt mit der Stoffbahn

mit

$$\mathbf{A} = -\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Z} \quad (4.31)$$

gelöst und die Eigenwerte als Funktion der Stoffbahngeschwindigkeit v_p ermittelt. Die für die Berechnungen verwendeten Parameter setzen sich aus den schon in Kapitel 2 und Kapitel 4 dieser Arbeit verwendeten Parametern zusammen. Sie sind nochmals in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

Im ersten Fall ist $a = 0$. Für die Approximation der Walzenoberfläche werden in (4.1) die Ansatzfunktionen

$$\begin{aligned} R_1(\gamma) &= \cos(4\gamma), & R_2(\gamma) &= \sin(4\gamma) \\ R_3(\gamma) &= \cos(29\gamma), & R_4(\gamma) &= \sin(29\gamma) \end{aligned} \quad (4.32)$$

verwendet. Damit wird ein Verschleißmuster mit vier Wellen und ein Verschleißmuster mit 29 Wellen über dem Umfang der Walze zugelassen. Die berechneten Eigenwerte sind in Bild 4.4 dargestellt. Die obere Graphik zeigt den Verlauf der positiven Imaginärteile der konjugiert komplexen Eigenwerte und die untere Graphik zeigt den Verlauf der Realteile. Es ist zu erkennen, dass der Imaginärteil zweier Eigenwerte über den gesamten Bereich von v_p konstant ist. Die zu diesen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren sind durch

die Auslenkung des Walzenmittelpunktes dominiert. Des Weiteren existieren zwei Eigenwerte deren Imaginärteile mit jeweils einer konstanten Steigung anwachsen. Die entsprechenden Eigenvektoren sind durch die Zustände dominiert, die entweder zu einer Walzenoberfläche mit vier Wellen über dem Umfang oder zu einer Walzenoberfläche mit 29 Wellen über dem Umfang führen. Kreuzt ein wachsender Imaginärteil den unteren konstanten Imaginärteil, existieren keine Auffälligkeiten in den Realteilen. Anders verhält es sich bei den Kreuzungspunkten mit dem oberen konstanten Imaginärteil. An diesem Kreuzungspunkt ist deutlich zu erkennen, dass ein Maximum in den positiven Realteilen existiert. Hier kommt es zu einer inneren Resonanz und ein Verschleißmuster mit 29 Wellen über dem Umfang wird sehr schnell anwachsen.

Im zweiten betrachteten Fall wird der Einfluss von a auf den Verlauf der Eigenwerte untersucht. Für die Approximation der Walzenoberfläche werden

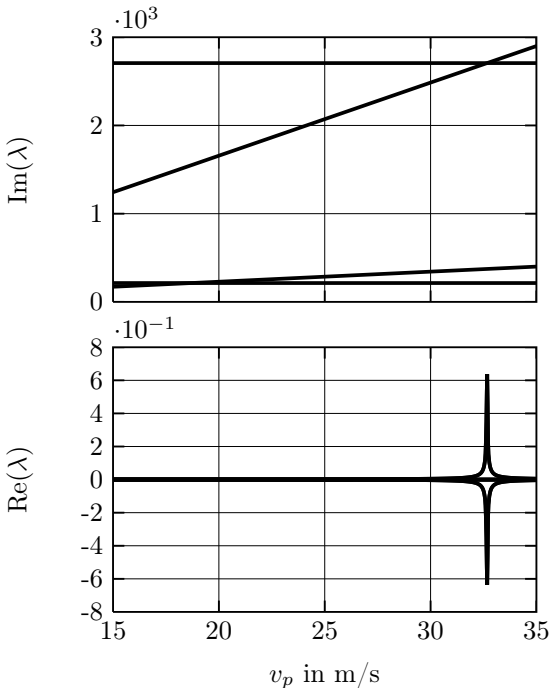


Bild 4.4:

Eigenwerte des Systems
als Funktion der
Stoffbahngeschwindigkeit
bei $a = 0$

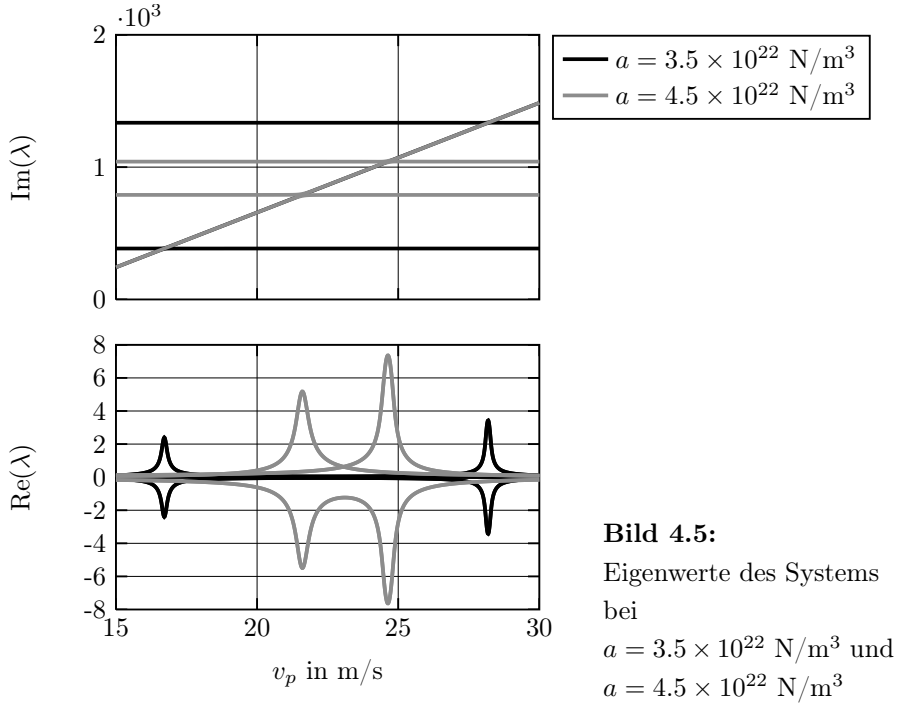


Bild 4.5:

Eigenwerte des Systems
bei

$a = 3.5 \times 10^{22} \text{ N/m}^3$ und
 $a = 4.5 \times 10^{22} \text{ N/m}^3$

jetzt die Ansatzfunktionen

$$R_1(\gamma) = \cos(29\gamma) \tag{4.33}$$

$$R_2(\gamma) = \sin(29\gamma)$$

verwendet und damit nur ein mögliches Wellenmuster über dem Umfang zugelassen. In Bild 4.5 sind die berechneten Verläufe der Eigenwerte für $a = 3.5 \times 10^{22} \text{ N/m}^3$ und $a = 4.5 \times 10^{22} \text{ N/m}^3$ gegenübergestellt. Für jeden dieser Werte von a existieren zwei Eigenwerte mit konstantem Imaginärteil. Mit steigendem a nähern sich diese einander an. Gleichfalls existiert für beide Werte von a ein Eigenwert, dessen Imaginärteil mit einer konstanten Steigung wächst und der die konstanten Imaginärteile kreuzt. Die Kreuzungspunkte laufen ebenfalls mit steigendem a aufeinander zu. Für die Realteile tritt im

Vergleich zu dem Fall $a = 0$ an beiden Kreuzungspunkten ein Maximum auf. Es ist zu erkennen, dass die Maxima selbst mit zunehmender Kopplung der Steifigkeit der Stoffbahn in Bahnrichtung an die Kompression anwachsen.

4.2 Diskussion der Ergebnisse

Die Ergebnisse der Analysen aus Abschnitt 4.1 zeigen, dass ein Zusammenspiel zwischen Systemdynamik und Verschleiß nicht unabhängig von den Gegebenheiten im Kontaktbereich gesehen werden kann. Die Systemdynamik wird von den Gegebenheiten im Nip beeinflusst. Die Systemdynamik wiederum geht mit der Verschleißentwicklung einher und der Verschleiß beeinflusst die Zusammenhänge im Nip.

Die berechneten Eigenwerte zeigen, dass die Effekte, die in der Modellierung der Walze ohne Verschleiß eine einseitige Kopplung der Bewegungsgleichungen bewirken, Auswirkungen auf die Wachstumsraten von Verschleißmustern haben. Die Imaginärteile der Eigenwerte, bei denen die Eigenvektoren durch eine Bewegung der Walzenmitte dominiert sind, nähern sich für steigendes a einander an. Das Schwingungsverhalten bzw. die Eigenwerte verändern sich dadurch dahingehend, dass zusätzliche Stellen der inneren Resonanz entstehen. Ferner werden die Maxima der Eigenwerte, deren Eigenvektoren ein Verschleißmuster charakterisieren, größer.

Die Werte von a , für die in diesem Kapitel eine Auswirkung auf das Eigenverhalten zu erkennen ist, sind im Vergleich zu den Ergebnissen aus Kapitel 2 erhöht. Dies resultiert aus der Linearisierung um den Punkt $q_y = 0$ und $q_1 = 0$ bis $q_2 = 0$ und den sich dadurch in (4.20) ergebenden Konstanten. Auf einen Nachweis, ob die Annahme des Haftens bei diesen Werten von a und bei einer sich verändernden Oberfläche noch gültig ist, wird an dieser Stelle verzichtet.

5 Zusammenfassung

In einem der letzten Prozessschritte der Papierherstellung werden in Papierkalandern die für den späteren Verwendungszweck des Papiers benötigten Oberflächeneigenschaften erzeugt. Hierbei wird das Papier in Kalandern durch einen oder mehrere Walzenspalte geführt und so geglättet. Im Zusammenhang mit der Kalandrierung kann es zu Schwingungsphänomenen kommen, die den Prozess maßgeblich beeinflussen. Eines der Schwingungsphänomene ist dadurch charakterisiert, dass es bei hohen Betriebsgeschwindigkeiten zu plötzlich auftretenden Schwingungen der Walzen kommt. Hierbei entstehen in sehr kurzer Zeit große Schwingungsamplituden. Ein weiteres Schwingungsphänomen ist unter der Bezeichnung „Barring“ bekannt. Charakteristisch hierbei ist, dass sich in einem Zeitraum von mehreren Tagen bis Wochen irreversible Wellenmuster auf den Kunststoffbezogenen Walzen ausbilden, die durch Verschleiß entstehen. Beide Phänomene können einen wirtschaftlichen Betrieb der Papiermaschine beeinträchtigen. Bei den plötzlich auftretenden Schwingungen kann die vorgesehene Produktionsgeschwindigkeit der Papiermaschine unter Umständen nicht erreicht werden. Kommt es zum Barring der Kalandervalzen, entstehen zusätzliche Betriebskosten aufgrund von ungeplanten Stillstandszeiten der Maschine. Zudem müssen die teuren Walzen ausgetauscht und repariert werden. Weder das Auftreten von plötzlichen Instabilitäten noch die langsame Bildung von Verschleißmustern auf den Walzen sind aus mechanischer Sicht zufriedenstellend erklärt. Ein mangelndes Verständnis der ursächlichen Vorgänge verhindert derzeit effiziente Gegenmaßnahmen. Mathematisch-mechanische Modelle von Papierkalandern können helfen, die ursächlichen maschinendynamischen Prozesse zu verstehen. Gegenstand dieser Arbeit ist es, solche Modelle

zu entwickeln und zu analysieren. Ferner werden Stellschrauben für die Entwicklung von Gegenmaßnahmen aufgezeigt und bewertet.

Im ersten Teil der Arbeit wird ein Modell vorgestellt, das es ermöglicht, das Schwingungsverhalten eines Papierkalanders bei hohen Produktionsgeschwindigkeiten zu untersuchen. Das Hauptaugenmerk liegt hierbei darauf, zu ergründen, wie das Schwingungsverhalten eines Papierkalanders durch die Gegebenheiten im Nip beeinflusst wird. Die Modellierung beinhaltet eine als starr angenommene Walze, die im Kontakt mit einem Modell für die Stoffbahn steht. Es werden zunächst die stationären Kräfteverhältnisse im Walzenspalt nachgebildet und dann die um die stationären Zustände linearisierten Bewegungsgleichungen untersucht. Die Ergebnisse der Untersuchungen zeigen, dass die Bewegungsgleichungen der Walzen über den Kontakt mit der Stoffbahn einseitig gekoppelt werden. Diese einseitige Kopplung führt zu Instabilitäten des Systems und kann damit als Ursache für schnell aufklingende Schwingungen der Walzen an Papierkalandern gesehen werden. Parameterstudien zeigen, wie prinzipiell ein stabilisierender Effekt erzielt werden kann.

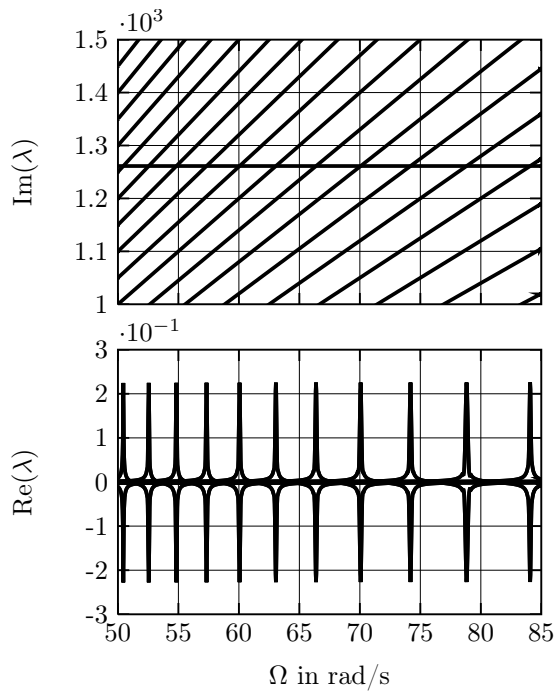
Im zweiten Teil der Arbeit werden drei Modelle eingeführt, die es ermöglichen, Zusammenhänge bei der Entwicklung von Verschleißmustern zu untersuchen. Die Modellierung basiert darauf, die Oberfläche einer Walze als linear gedämpftes Kontinuum ohne Rückstellung abzubilden. Das Verhalten des Kontinuums wird durch eine partielle Differentialgleichung beschrieben, die mit Standardmethoden diskretisiert werden kann. Die Modellierungsmethode führt für jedes der vorgestellten Modelle auf eine geschlossene Systembeschreibung. Anhand des Modells einer festgelagerten rotierenden Walze, die aufgrund einer harmonischen Kraft verschleißt, wird gezeigt, wie es zu einer Entwicklung von Barring aufgrund von Wechsellasten kommen kann, die nicht durch die Dynamik der Maschine verursacht werden. Danach wird anhand eines Modells mit elastisch gelagerter Walze untersucht, wie die Entwicklung von Verschleißmustern mit der Systemdynamik zusammenhängt. Das Modell wird dann auf ein System mit zwei dynamischen Freiheitsgraden erweitert. Hier wird den Systemen zum Ausgleich der Durchbiegung der Kalandervalzen Rechnung getragen. Für

die dynamischen Modelle mit Oberflächenverschleiß zeigen Parameterstudien, wie ein positiver Effekt im Bezug auf Barring zu erzielen ist.

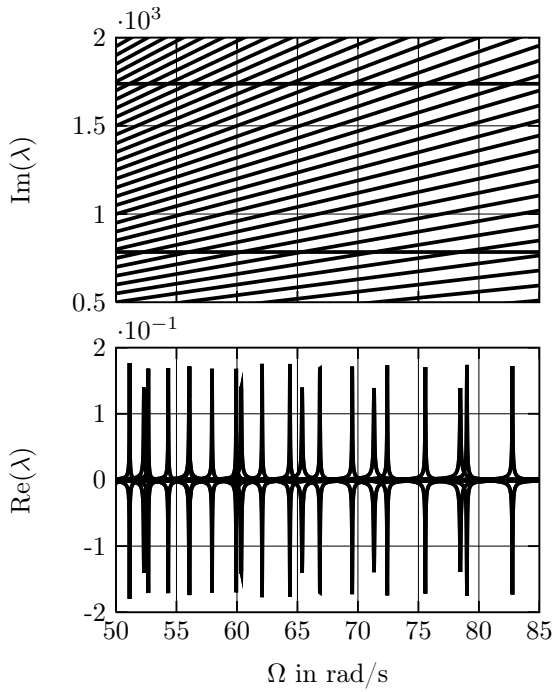
Im dritten Teil der Arbeit werden die Modellierungsansätze der ersten beiden Teile zusammengeführt. Es wird ein Modell vorgestellt, das qualitative Einblicke gibt, wie sich eine detaillierte Modellierung des Kontaktbereiches auf die Entwicklung von Verschleißmustern auswirkt. Es wird gezeigt, dass die Effekte, die eine einseitige Kopplung der Bewegungsgleichung der Walze bewirken, gleichfalls einen negativen Einfluss auf die Entwicklung von Verschleißmustern haben.

6 Anhang

A: Eigenwerte der ungedämpft gelagerten Walze mit Oberflächenverschleiß aus Kapitel 3



B: Eigenwerte des ungedämpften Systems mit zwei dynamischen Freiheitsgraden aus Kapitel 3



Literaturverzeichnis

- [1] BÖHM, F. und K. KNOTHE (Herausgeber): *Hochfrequenter Rollkontakt der Fahrzeugäder*. Wiley-VCH, 1998.
- [2] BOS, J. H.: *Das Papierbuch*. ECA Pulp & Paper b.v., 1999.
- [3] BROMMUNDT, E.: *Wechselwirkungen zwischen Polygonalisation und Antrieb bei Eisenbahnrädern*. Technische Mechanik, 16:273–284, 1996.
- [4] BROMMUNDT, E.: *A simple model for friction induced high-frequency self-excitation of paper calenders*. Machine Dynamics Problems, 31:25–45, 2007.
- [5] BROMMUNDT, E.: *High-Frequency Self-Excitation in Paper Calenders*. Technische Mechanik, 29:60–85, 2009.
- [6] BROWNE, T. C., R. H. CROTOGINO und W. J. M. DOUGLAS: *Messung der Deformierung des Papiers im Nip eines experimentellen Kalanders*. Journal of Pulp and Paper Science, 20:266–271, 1994.
- [7] BROWNE, T. C., R. H. CROTOGINO und W. J. M. DOUGLAS: *Der Einfluß der Papierstruktur auf das Verhalten im Walzenspalt eines Kalanders*. Journal of Pulp and Paper Science, 21:343–347, 1995.
- [8] BROWNE, T.C., R.H. CROTOGINO und W.J.M. DOUGLAS: *Viscoelastic modeling of paper in a calender nip*. Pulp and Paper Science, 22:170–173, 1996.
- [9] DIN 6735:2010-02: *Papier, Pappe und Faserstoffe - Übersicht von Begriffen; Text Deutsch, Englisch und Französisch*. Deutsches Institut für Normung e.V., 2010.

- [10] FEYGIN, V. B.: *Modeling paper strain in a calender nip*. Tappi Journal, 82:183–188, 1999.
- [11] GRUNAU, E.: *Schwingungsminderung an Pressenpartien von Papiermaschinen durch dynamische Zusatzsysteme*. Dissertation, Fachbereich Maschinenbau, Technische Universität Darmstadt, 1997.
- [12] GRUNAU, R.: *Zur Wechselwirkung zwischen Schwingungen, Filzmarkierungen und Walzenwellungen in Pressenpartien von Papiermaschinen*. Dissertation, Fachbereich Maschinenbau, Technische Universität Darmstadt, 1993.
- [13] HAAG, R. v.: *Über die Druckspannungsverteilung und die Papierkompression im Walzenspalt eines Kalanders*. Dissertation, Fachbereich Maschinenbau, Technische Hochschule Darmstadt, 1993.
- [14] HAAG, R. v.: *Physikalische Grundlagen des Glättens*. Wochenblatt für Papierfabrikation, 18:872–876, 1997.
- [15] HAAG, R. v. VAN: *persönliche Mitteilung*, Krefeld, 2008.
- [16] HADER, P.: *Selbsterregte Schwingungen von Papierkalandern*. Dissertation, Universität Duisburg-Essen, 2005.
- [17] HERMANSKI, M.: *Barringbildung am Glättkalander einer Papiermaschine*. Das Papier, 9:581–590, 1995.
- [18] HESTMO, R. H.: *Laboratory Studies of Paper Calendering using a Pendulum Device*. Dissertation, Norwegische Technisch-Naturwissenschaftliche Universität, 2001.
- [19] HINGE, K. C. und A. M. MANIATTY: *Model of steady rolling contact between layered rolls with thin media in the nip*. Engineering Computations, 15:956–976, 1998.
- [20] HOFFMAN, N., M. FISCHER und L. ALLGAIER, R. UND GAUL: *A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations*. Mechanics Research Communications, 29:197–205, 2002.

- [21] JÄRVENPÄ, V.-M. und L. YUAN: *Active vibration control of multibody rolling contact system*. In: *Motion and Vibration Control*, 2009.
- [22] JÄRVENPÄ, V.-M., L. YUAN und E. KESKINEN: *A case study of the rolling contact of a calender roll*. *Proceedings Institution of Mechanical Engineers*, 216:327–333, 2002.
- [23] KESKINEN, E., S. LAUNIS und J.-M. KIVINEN: *Multibody modeling of paper calendering unit by contact dynamics formulation*. J.A.C: Marzins and M.D.P. Monteiro Marques, *Contact Mechanics*, Seiten 237–244, 2002.
- [24] LABRENZ, H. C.: *Stabilität des Walzenlaufes bei Druck- und Papiermaschinen*. Dissertation, Institut für Technische Mechanik, Technische Universität Braunschweig, 2002.
- [25] LANGEMANN, D.: *Numerische Analyse abrasiv verschleißender mechanischer Systeme*. Dissertation, Universität Rostock, 1999.
- [26] LITVINOV, V. und R. FARNOOD: *Modeling of the compression of coated papers in a soft rolling nip*. *Journal of Materials Science*, 45:216–226, 2010.
- [27] MATSUZAKI, K., A. SUEOKA, T. RYU, H. MORITA, K. HIDAKA und S. NOGUCHI: *Polygonal Wear of Work Rolls in a Hot Leveler of Steel Making Machine (4th Report, Experimental Verification of a countermeasure by Using Dynamic Absorbers)*. *Journal of Environment and Engineering*, 3:146–156, 2008.
- [28] MEINDERS, T.: *Dynamik und Verschleiß von Eisenbahnwheelsätzen*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2005.
- [29] MELNICK, R. M.: *Comprehensive Model of Calender Stacks for Dynamic Analysis and the Prediction of Offsets*. Dissertation, Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Toronto, 1997.
- [30] MENG, H. C. und K. C. LUDEMA: *Wear models and predictive equations: their form and content*. *Wear*, 181-183:443–457, 1995.

- [31] MÄKELÄ, P. und S. ÖSTLUND: *Orthotropic elastic plastic-material model for paper materials*. International Journal of Solids and Structures, 40:5599–5620, 2003.
- [32] NIEMANN, J.: *Kalenderwalzen-Barring*. twogether, 2009. VOITH Paper Firmenschrift.
- [33] SOONG, T.-C. und C. LI: *On the unbonded contact between plates and layered cylinders*. Applied Mechanics, 47:841–846, 1980.
- [34] SOONG, T.-C. und C. LI: *The rolling Contact of Two Elastic-Layer-covered Cylinders Driving a Loaded Sheet in the Nip*. Journal of Applied Mechanics, 48:889–894, 1981.
- [35] SPELSBERG-KORSPETER, G., D. HOCHLENERT und P. HAGEDORN: *The self-excitation mechanism in paper calenders formulated as a stability problem*. Technische Mechanik, 31:15–24, 2010.
- [36] STENBERG, N.: *A model for the through-thickness elastic-plastic behaviour of paper*. International Journal of Solids and Structures, 40:7483–7498, 2003.
- [37] STENBERG, N., C. FELLERS und S. ÖSTLUND: *Plasticity in the Thickness Direction of Paperboard Under Combined Shear and Normal Loading*. Journal of Engineering Materials and Technology, 123:184–190, 2001.
- [38] SUEOKA, A., T. RYU, T. KONDOU, Y. TSUDA, K. KATAYAMA, K. TAKASAKI, M. YAMAGUCHI und H. HIROOKA: *Polygonal Deformation of Roll-Covering Rubber*. Japan Society of Mechanical Engineers International Journal, 39:1–10, 1996.
- [39] VOITH PAPER GMBH: *EcoSoftTM-Kalender - für das ganze Spektrum der Softnip-Satinage*. Produktbroschüre, 2011.
- [40] VOITH PAPER GMBH: *JanusTM MK 2 - das Satinagekonzept für höchste Ansprüche*. Produktbroschüre, 2011.

- [41] WEISS, J.: *Modellbildung und Simulation radial gekoppelter Rotoren*. Dissertation, Institut für Mechanik und Rotordynamik; Technische Universität Chemnitz, 2008.
- [42] WEYH, B.: *Schwingungserscheinungen durch Zusammenwirken von Verarbeitungsgut und Arbeitsorgan am Beispiel Flachwalzen*. Schwingungen in Verarbeitungsmaschinen, 2005.

Lebenslauf

Steffen Wiendl

Geburtsdatum:	03.07.1980
Geburtsort:	Frankfurt a.M.
Familienstand:	ledig
Staatsangehörigkeit:	deutsch

Schulische Bildung:

1986 – 1990	Grundschule in Flörsheim a.M.
1990 – 2001	Graf-Stauffenberg-Gesamtschule in Flörsheim a.M.
2001	Abitur

Studium:

2001 – 2008	Studium des Maschinenbaus an der TU Darmstadt
2008	Diplom

Berufliche Tätigkeit:

seit 04/2008	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet, später Arbeitsgruppe, Dynamik und Schwingungen, Fachbereich Maschinenbau der TU Darmstadt
--------------	---

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, Steffen Wiendl, an Eides statt, dass ich die vorliegende Dissertation selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Darmstadt, 17. August 2011

Steffen Wiendl